BİLEŞİK FAİZ:

Basit faiz hesabı kısa vadeli(1 yıldan az) kredi işlemlerinde uygulanan bir metot idi. Ayrıca basit faiz metodunda her dönem için anapara sabit kalmakta olup o dönem elde edilen faiz tutarı bir sonraki dönemde anaparaya eklenmiyordu.

Bileşik faiz hesabı ise, uzun vadeli(1 yıldan çok) kredi işlemlerinde uygulanan bir metottur. Bu hesaplamada sermaye sabit kalmaz. Yani her dönem sonunda hesaplanan faiz tutarı o dönem başında yatırılan anaparaya eklenerek bir sonraki döneme ait anapara oluşturulur. Yani bir dönemin baliğ değeri bir sonraki dönemin anaparasıdır. Böylelikle her dönem elde edilecek faiz tutarı basit faizdeki gibi aynı olmayıp artarak gider. Çünkü her dönem elde edilen faiz tutarına, bir sonraki dönem de faiz işletilmektedir.

Bileşik faiz uygulamasıyla, yapılan yatırım her türlü oluşabilecek riske karşı basit faize göre daha çok garanti altına alınmış olur.

Bileşik faiz hesaplaması belirli dönemler(aylık, 2 aylık, 3 aylık, 4 aylık, 6 aylık,…gibi) itibariyle yapılıyor ise buna "kesikli bileşik faiz hesaplaması", çok küçük zaman aralıklarıyla sürekli veya anlık olarak hesaplanıyor ise buna da "sürekli veya anlık bileşik faiz hesaplaması" denir.

Bileşik faiz hesaplamalarında kullanılan semboller basit faizdeki ile aynıdır. Temel formüller ise şöyledir:

*Anaparanın kesikli bileşik faiz hesaplaması ile n dönem sonunda ulaşacağı toplam miktar(baliğ):

$$\boxed{A=a(1+t)^{n}}$$

*Anaparanın sürekli veya anlık bileşik faiz hesaplaması ile n dönem sonunda ulaşacağı toplam miktar:

$$\boxed{A=a.e^{n.t}}\ , e=2,718281\ldots$$

Bu kısımda çözülecek bazı sorularda matematikteki logaritma kavramının bilinmesi gerektiğinden, kısaca logaritma işlemini ve önemli özelliklerini hatırlayalım:

Örnek 10: Yıllık %20 faiz oranı üzerinden bankaya yatırılan 1000 TL'nin, 3. yıl sonunda ulaşacağı değeri basit ve bileşik faiz hesaplama yöntemleriyle hesaplayarak karşılaştırınız.

çözüm: t=0,20 a=1000 TL n=3 yıl A=?

Basit faiz hesaplama yöntemi ile: A=a(1+nt) $\Rightarrow A_1 = 1000(1+3.0,20)$

$$\Rightarrow A_1 = 1600 \text{TL}$$

Bileşik faiz hesaplama yöntemi ile: $A = a(1+t)^n \Rightarrow A_2 = 1000(1+0,20)^3$

$$\Rightarrow A_2 = 1728 \text{ TL}$$

$A_1 - A_2 = 1728 - 1600 = 128$ TL fark, 3 yıl içerisinde faizin kazandırdığı faizdir.

Yani, anapara faizinin dışında faizin faizidir.

Örnek 11: Bir yatırımcı 28500 TL'sini yıllık %30 faiz oranı üzerinden 5 yıl için bileşik faize yatırmıştır. Yatırımcının vade sonunda eline geçecek para ne kadardır?

çözüm: a=28500 TL n=5 yıl t=0,30 A=?

$A=a(1+t)^n \Rightarrow A = 28500(1+0,3)^5$

$=28500(1,3)^5$

$=105818,505$ TL bulunur.

Örnek 12: Bir miktar para yıllık %25 faiz oranı ile bileşik faiz işlemi gördüğünde 2 yıl sonra faizi ile birlikte 5625 TL'ye ulaştığına göre bankada işlem gören anapara kaç TL'dir?

çözüm: t=0,25 n=2 yıl A=5625 TL a=?

$$A=a(1+t)^{n} \Rightarrow 5625 = a(1+0{,}25)^{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5625}{(1{,}25)^{2}} = 3600\text{TL bulunur.}$$

Örnek 13: Yıllık %50 bileşik faiz veren bir bankaya yatırılan belli miktar para, kaç yıl sonra 10 katına ulaşır?(log 1,5=0,176)

çözüm: t=0,50 A=10a n=?

$$A=a(1+t)^{n} \Rightarrow 10a = a(1+0{,}5)^{n}$$

$$\Rightarrow 10 = (1{,}5)^{n}$$

Son bulduğumuz eşitlikte, üs olarak yer alan n değerini bulmak için eşitliğin her iki tarafına logaritma fonksiyonunu uygulayalım:

$$\log 10=\log(1{,}5)^{n} \Rightarrow \log_{10}10 = n.\log(1{,}5)$$

$$\Rightarrow 1 = n.0{,}176$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{0{,}176} \approx 5{,}7 \text{ yıl bulunur.}$$

Örnek 14: Bankaya yatırılan 30000 TL, 4 yılda bileşik faiz uygulanarak 480000 TL'ye ulaşıyor. Buna göre bankanın uyguladığı yıllık faiz oranı nedir?

çözüm: a=30000 TL n=4 yıl A=480000 TL t=?

$$A=a(1+t)^n \Rightarrow 480000=30000(1+t)^4$$

$$\Rightarrow (1+t)^4=16$$

$$\Rightarrow 1+t=2$$

$\Rightarrow t=1 \Rightarrow$ %100 faiz oranı bulunur.

DÖNEMSEL FAİZLENDİRME:

Dönemsel faizlendirme, bir devrede(1 yıl olabilir) sabit anapara için birden fazla eşit aralıklarla faiz hesaplaması yapılması işlemidir.

Bankalar tarafından daha önceki yıllarda tasarruf mevduatlarına uygulanmakla birlikte günümüzde daha çok, özellikle orta ve küçük ölçekli işletmeleri desteklemek amacı ile yatırımcılara verilen uzun vadeli, düşük faizli kredilerin faizlendirilmesinde kullanılmaktadır. Vade uzun, faiz düşük olduğundan ve ayrıca işletme riskli görülüyorsa, bankalar verdikleri kredinin faiz ödemelerini dönemsel olarak almak isterler. Bankalar, kısa vadeli banka kredilerinin dönemsel olarak ödenmesinde müşteriyi desteklemek ve ödemeleri cazip hale getirmek için efektif faiz oranını kullanmayı tercih etmektedirler.

Ayrıca dönemsel faizlendirme, para ve sermaye piyasaları kapsamında olan kurum ve kuruluşlarca da kullanılmaktadır. Örneğin, tahvil(=Devlet ve şirketler tarafından çıkarılan faizli borç senedi) sahiplerine yapılan ödemeler de dönemseldir. Faiz ödemelerinin dönemleri ve faiz oranları tahviller üzerinde yazılıdır. Faiz ödemeleri belirli eşit aralıklarla yapılır. Tahvilin vadesi dolduğunda tahvil sahibine anapara da ödenir. Tahvillerin faiz ödemeleri dönemsel faizlendirme işlemlerine güzel bir örnektir. Ancak tahvillerin çeşitleri bulunduğundan ve farklı ödeme yöntemleri olduğundan burada bu kısımlarıyla ilgilenmeyeceğiz. Biz sadece dersimizde kullanacağımız kısmına ve özellikle de 1 yıl içinde 3, 4, 6 ay gibi aralıklarla yapılan faiz ödemelerine değineceğiz.

Not 2: Bu kısımda yapacağımız işlemler için şu şekilde bir özet bilgi verebiliriz: Bileşik faiz hesabıyla ilgili problemlerde eğer faizlendirme devresi, 1 yıldan daha kısa bir süre veya süreleri içeriyorsa ve faiz oranı yıllık olarak verilmiş ise; t faiz oranı ve n dönem sayısı düzenlenerek birbirine uygun hale getirilmelidir.

Örnek 15: Bir şirket 60000 TL'sini her 3 ayda bir faizlendirmek üzere yıllık %56 faiz oranı üzerinden 2 yıllığına bankaya yatırıyor. Buna göre 2 yılın sonunda şirketin eline geçecek toplam para miktarı ne kadardır?

çözüm: a=60000 TL A=?

3 ayda bir faizlendirme olduğundan, 1 yıldaki dönem sayısı: $\frac{12}{3} = 4$'tür. Para bankada 2 yıl kalacağı için:

Faizlendirme dönem sayısı: n=2.4=8

olur. 1 yıldaki dönem sayısı 4 olduğundan, yıllık faiz oranı 4'e bölünerek dönemlik faiz oranı bulunur.

Dönemlik Faiz Oranı: $t = \frac{0,56}{4} = \%14$

$$A=a(1+t)^{n} \Rightarrow A = 60000(1+0,14)^{8}$$

$$= 60000(1,14)^{8}$$

$$\approx 171155,19 \text{ TL bulunur.}$$

Örnek 16: Bir tasarruf sahibi 3 yıl vadeli menkul kıymet almıştır. Menkul kıymet üzerinde faiz ödemelerinin 6 ayda bir yapılacağı ve faiz oranının %72 olduğu belirtilmiştir. Vade sonunda tasarruf sahibinin anapara ile birlikte eline geçecek miktar 156000 TL olduğuna göre tasarruf sahibinin menkul kıymete bağladığı anaparası ne kadardır?

çözüm: n=2.3=6

$t=\frac{0,72}{2}=\%36$

A=156000 TL

a=?

$$A=a(1+t)^n \Rightarrow 156000=a(1+0,36)^6$$

$$\Rightarrow a=\frac{156000}{(1,36)^6}$$

$$\Rightarrow a \approx 24654,21 \text{ TL bulunur.}$$

Örnek 17: 10000 TL yıllık %12 faiz oranı üzerinden 5 yıl süre ile:

a)1'er yıllık **b)**6'şar aylık **c)**3'er aylık **d)**1'er aylık **e)**1'er günlük **f)** anlık

dönemler kullanılarak bileşik faize verilirse kaç TL'ye ulaşır?

çözüm: a=10000 TL, t=0,12, n=5 yıl, A=?

a) $\left.\begin{array}{l} t=0,12 \\ n=5 \end{array}\right\} \Rightarrow A=a(1+t)^n \Rightarrow A=10000(1+0,12)^5$

$$=10000(1,12)^{5}$$

$$\approx 17623,42 \text{ TL}$$

b) $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{0,12}{2}=0,06 \\ n=2.5=10 \end{array}\right\} \Rightarrow A=a(1+t)^{n} \Rightarrow A=10000(1+0,06)^{10}$

$$=10000(1,06)^{10}$$

$$\approx 17908,48 \text{ TL}$$

c) $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{0,12}{4}=0,03 \\ n=4.5=20 \end{array}\right\} \Rightarrow A=a(1+t)^{n} \Rightarrow A=10000(1+0,03)^{20}$

$$=10000(1,03)^{20}$$

$$\approx 18061,11 \text{ TL}$$

d) $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{0,12}{12}=0,01 \\ n=12.5=60 \end{array}\right\} \Rightarrow A=a(1+t)^{n} \Rightarrow A=10000(1+0,01)^{60}$

$$=10000(1,01)^{60}$$

$$\approx 18166,97 \text{ TL}$$

e) $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{0,12}{360}=0,00033 \\ n=360.5=1800 \end{array}\right\} \Rightarrow A=a(1+t)^{n} \Rightarrow A=10000(1+0,00033)^{1800}$

$$=10000(1{,}00033)^{1800}$$

$$\approx 18110{,}41 \text{ TL}$$

f) $\left.\begin{matrix} t = 0{,}12 \\ n = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = ae^{nt} \Rightarrow A = 10000.e^{5.0{,}12}$

$$=10000.e^{0{,}6}$$

$$\approx 18221{,}19 \text{ TL bulunur.}$$

TEORİK FAİZ:

Bu konuda söz sahibi olan bazı teorik yaklaşımcılar; faiz tutarı, ister gerçek ister pratik(ticarî) faiz metotlarına göre hesaplanmış olsun, her iki metodun da hatalı olduğunu ileri sürmektedirler. Onlara göre t faiz oranının katıldığı bir orantı yoluyla a kapitali için n süresine göre hesaplanan faiz tutarı olan F'nin devre sonunda ele geçmesi gerekir. Oysa, uygulamada faiz tutarı olan F, a kapitali ile birlikte sürenin sonunda tahsil edilmektedir.

Onlara göre söz konusu hatanın ortadan kalkması için, kapital sahibi sürenin sonunda kapitalini geri alarak, faiz tutarını alabilmek için devre sonunu beklemelidir. Faiz tutarı kapitalle birlikte alınınca kapitali kullanan kişi, olması gerekenden daha fazla faiz ödemek zorunda kalmaktadır.

Bu durumu daha anlaşılır kılmak için bir sayısal örnek verelim:

Bir kapital sahibi 1000 TL olan anaparasını, %20 faiz oranı üzerinden 1 yıllığına faize vermiş olsun. Bu durumda:

1000 TL'nin 1 yıllık faiz tutarı: F= 1000.1.0,20=200 TL elde edilir.

Kapital sahibi 1000 TL'sini 1 yıllığına bir defada faize vermek yerine 6 aylık sürelere göre iki defada da faize verebilirdi. Bu durumda:

1000 TL'nin ilk 6 aylık faiz tutarı: $F=\frac{1000.6.0,20}{12}=100\,TL$

İlk 6 ay sonunda anaparanın ulaştığı değer: 1000+100=1100 TL

1100 TL'nin sonraki 6 aylık faiz tutarı: $F=\frac{1100.6.0,20}{12}=110\,TL$

1 yıl sonunda elde edilecek faiz tutarları toplamı: 100+110=210 TL olur.

Halbuki faiz tutarı sürenin sonunda değil de, devre sonunda alınmış olsaydı, 1000 TL'nin %20'den bir yıl süreyle faize verildiği durumda elde edilecek faiz tutarı ile 6'şar aylık süreleri değerlendirerek 1 yıllığına verilmesi durumunda elde edilecek faiz tutarı aynı olacak, farklı bir sonuç ortaya çıkmayacaktı.(Süre bitiminde faiz tutarı alınamayacağı için anapara aynı biçimde kullanılmış olacağından.)

Faiz tutarının devrenin sonunda değil de, sürenin sonunda alınması nedeniyle ortaya çıkan fark, pratik veya gerçek faizin hatasını göstermektedir. Bu hata, süre sonunda hesaplanan faiz tutarının devre sonuna kadar olan faizine eşittir. Hatanın giderilmesi için n süresine göre hesaplanan faiz tutarından F'nin devre sonuna kadar olan faizinin düşülmesi veya F'nin devre sonunda ele geçmesi gerekir. Söz konusu hataya yol açmadan hesaplanan faize "teorik faiz" denir.

Teorik Faiz= $F' = F - F.(1-n).t \Rightarrow F' = ant - ant(1-n)t$

$$\Rightarrow \boxed{F' = ant\left[1-(1-n)t\right]}$$

Örnek 18:30000 TL'nin %15'ten 8 aylık teorik faiz tutarı kaç TL'dir?

çözüm:

$$F' = \frac{ant}{12}.\left[1-(1-n).t\right]$$

$$\Rightarrow F' = \frac{30000.8.0,15}{12}\left[1-\left(1-\frac{8}{12}\right).0,15\right]$$

$\Rightarrow$ F'=2850 TL bulunur.

PRATİK FAİZ İLE GERÇEK FAİZ ARASINDAKİ FARK:

Devre yıl olarak seçilir ve süre gün biriminden ifade edilirse, pratik faiz tutarı ve gerçek faiz tutarı arasında bir fark olduğu görülür. Bu fark(d_1):

Pratik Faiz Formülü: $\boxed{F_1 = \frac{ant}{360}}$

Gerçek Faiz Formülü: $\boxed{F_2 = \frac{ant}{365}}$

olarak alınırsa:

$$d_1 = F_1 - F_2 = \frac{ant}{360} - \frac{ant}{365} \Rightarrow \boxed{d = \frac{5ant}{360.365}}$$

şeklindedir.

Örnek 19: 48000 TL'nin yıllık %5'ten, 6 aylık pratik ve teorik faiz tutarları arasındaki fark kaç TL'dir?

çözüm: $d_2 = F - F' \Rightarrow d_2 = F - \left[F - F(1-n)t\right]$

$$\Rightarrow d_2 = F(1-n)t$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{48000.6.0,05}{12}(1-\frac{6}{12})0,05 = 30 \text{ TL olarak bulunur.}$$

Anapara(a) ve faiz oranı(t) sabit kalmak üzere, 1 yıldan az olan her türlü süreye(n) karşılık bulunacak en büyük fark 30 TL'dir. n, 6 aydan(yarım devreden) uzaklaştıkça, d_2 küçülür.

NOMİNAL FAİZ ORANI VE EFEKTİF FAİZ ORANI:

Enflasyon, paranın alım gücünün düşmesi olarak tanımlanabilir. Bankaların krediler için belirli vadelere göre açıkladıkları faiz oranları nominal faiz oranlarıdır. Nominal faiz oranına göre elde edilecek faiz tutarının enflasyonun etkisi dışında kalan kısmı da reel faiz oranını belirler. Örneğin, paramızı bankaya 1 yıl süre ile %40 faiz oranı üzerinden mevduat hesabına yatırmış olsak, paramızın %40'ı 1 yıl sonunda alacağımız nominal faiz tutarıdır. Varsayalım ki, bir yılın sonunda yıllık enflasyon %40 seviyesinde gerçekleşmiş olsun. Bu durumda reel kazancımız sıfır olur. Yani reel faiz oranı %0'dır.

Bankalar faiz oranlarını yıllık olarak belirlemektedir. Örneğin; 1 aylık mevduata %60 faiz oranı belirlenmiş ise aylık mevduata verilen gerçek faiz;

%60:12=%5

olur. 3 aylık mevduata %36 faiz oranı belirlenmiş ise 3 aylık mevduata verilen faiz, 1 yılda 4 tane 3 aylık dönem olduğundan;

%36:4=%9

olur. 6 aylık mevduata %48 faiz oranı belirlenmiş ise 6 aylık mevduata verilen faiz, 1 yılda 2 tane 6 aylık dönem olduğundan;

%48:2=%24

olur. Bu örneklerde kullandığımız yıllık %60, %36 ve %48 faiz oranları, yıllık nominal faiz oranlarıdır.

Efektif faiz oranı(E.F.O) ise; aylık, 3 aylık, 4 aylık, 6 aylık dönemlerle faize yatırılan paranın yıllık bileşik olarak getiri oranıdır. Örneğin; aylık mevduata yıllık %84 nominal faiz oranı belirlenmiş ise efektif faiz oranı şu şekilde bulunur:

Aylık faiz getirisi: %84:12=%7(dönemlik faiz oranı)

Her ay %7 faiz oranı ile 12 aylık bileşik getirisi:

$$(1+0,07)^{12}-1\approx 1,25=\%125$$

olur. Bazı bankalar, durumunu riskli gördükleri işletmeler kendilerinden kredi almak istediklerinde, bu işletmelerin belli miktar paralarını bankada bırakmalarını (bir güvence olarak) zorunlu kılarlar. Bu durumda, işletmenin reel anlamda kullanabileceği kredi miktarı, bankanın işletmeye açmış olduğu, görünen kredi miktarından daha küçüktür. Bankaların krediler için belirli vadelere göre açıkladıkları nominal faiz oranları, işletmenin eğer bankada alıkonulmuş bir miktar parası varsa düşebilecektir. Bu durumda E.F.O, nominal faiz oranından daha düşük olacaktır. Fakat bankaların cari hesap sözleşmelerine göre, her üç ayda bir gerçekleştirdikleri faizleri almaları ya da ana borca eklemeleri, bankaların yıllık efektif faiz oranlarını, açıklanan oranların üstüne çıkarmaktadır.

Bankalarda E.F.O, faiz ödeme dönemlerinin 1 yıldan kısa olması durumunda:

$$\text{E.F.O} = \left[1+\frac{\text{Yıllık Nominal Faiz Oran}}{\text{Yıllık Dönem Sayısı}}\right]^{\text{Yıllık Dönem Sayısı}} - 1$$

veya

$$\text{E.F.O} = \left[1+\text{Dönemlik Faiz Oranı}\right]^{\text{Yıllık Dönem Sayısı}} - 1$$

formülleri ile hesaplanır.

Örnek 20: 6 aylık mevduatın faiz oranı %60 olduğuna göre 6 ayda mevduata verilen yıllık efektif faiz oranı nedir?

çözüm:

Yıllık Dönem Sayısı= $\frac{12}{6} = 2$

Bir yılda 2 tane 6 aylık dönem olduğundan:

Dönemlik Faiz Oranı= $\frac{0,60}{2}$ = %30 'dur. Buradan:

$$\text{E.F.O} = \left[1+\text{Dönemlik Faiz Oranı}\right]^{\text{Yıllık Dönem Sayısı}} - 1$$

$$= (1+0,30)^{2} - 1$$

$$= 0,69$$

O halde, 6 ayda mevduata verilen yıllık efektif faiz oranı %69 olarak bulunur.

Örnek 21: 3 aylık mevduatın faiz oranı %40 olduğuna göre 3 ayda mevduata verilen yıllık E.F.O ne kadardır?

çözüm: Yıllık Dönem Sayısı= $\frac{12}{3} = 4$

Bir yılda 4 tane 3 aylık dönem olduğundan:

Dönemlik Faiz Oranı= $\frac{0,40}{4} = \%10$ 'dur. Buradan:

$$\text{E.F.O} = \left[1+\text{Dönemlik Faiz Oranı}\right]^{\text{Yıllık Dönem Sayısı}} - 1$$

$$=(1+0,10)^4 - 1$$

$$=0,4641 \approx 0,46 \Rightarrow \%46 \text{ bulunur.}$$