TÜREV VE UYGULAMALARI

A ⊂ R, a € A ve *f* de A da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limiti veya x=a+h koymakla elde edilen

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ limiti varsa *f* fonksiyonu a noktasında **türevlendirilebilir** denir.

Bu türev $f'(a), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}(\mathrm{a}), \mathrm{D}f(\mathrm{a})$ sembollerinden biri ile gösterilebilir.

Türev Alma Kuralları:

1. $f(\mathrm{x}) = c$ ise $f'(x)$=0 dır.
2. n € N için $(x^n)' = n.x^{n-1}\ dir.$
3. *f* türevlenebilen bir fonksiyon ve c bir sabitse

$$[\mathrm{c}\, f(\mathrm{x})]' = \mathrm{c}\, f'(\mathrm{x})$$

4. *f* ve g , A ⊂ R üzerinde tanımlı ve x € A noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ise *f* +g de x noktasında türevlenebilir ve

$$[f(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x})]' = f'(x) + g(x)$$

dir.

5. *f* ve g, x noktasında türevli iki fonksiyon ise *f*.g de x noktasında türevli olup

$$[\,\mathrm{f}(\mathrm{x}).\,\mathrm{g}(\mathrm{x})]' = f'(\mathrm{x})g(x) + f(\mathrm{x})g'(\mathrm{x})$$

6. g(x) ≠ 0 ise $\frac{f}{g}$ de x noktasında türevli olup

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$$

olur.

7. *f* fonksiyonu x de, g fonksiyonu *f*(x) de türevli ise g *o f* fonksiyonu x de türevli olup

$$(g\ o\ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$$

dir.

Bazı Özel Fonksiyonların Türevleri

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = 1 + tan^2x = sec^2x$
- $(\cot x)' = -(1 + cot^2x) = -csc^2x$
- $(\sec x)' = \sec x.\tan x$
- $(\csc x)' = -\csc x.\cot x$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$
- $(In\ x)' = \frac{1}{x}$
- $(a^x)' = a^x Ina$
- $(e^x)' = e^x$

Genel olarak, u, x değişkeninin bir fonksiyonu ise

- $(\sin u)' = (\cos u)u'$
- $(\cos u)' = (-\sin u)u'$
- $(\tan u)' = (1 + tan^2u)u'$
- $(\cot u)' = -(1 + cot^2u)u'$
- $(\sec u)' = (\sec u.\tan u)u'$
- $(\csc u)' = -(cscu.cotu)u'$
- $[\log_a u]' = \frac{u'}{u}\log_a e$
- $[a^u]' = a^u u' Ina$
- $[e^u]' = e^u u'$

olur.

Kapalı Biçimde Tanımlanan Fonksiyonun Türevi

Bilindiği gibi F(x,y)=0 biçimindeki bir bağıntıyla tanımlanan fonksiyonlara, kapalı biçimde verilmiş bir fonksiyon veya kısaca, bir kapalı fonksiyon denir. Böyle bir fonksiyonun türevini bulmak için F(x,y)=0 eşitliğinde her iki tarafın x'e göre türevi alınır, bulunan eşitliklerden y'çekilir.

Örnek:

$3y^2 + \mathrm{xy} + \mathrm{x}^2 = 0$ eşitliği ile tanımlanan fonksiyonun türevini hesaplayınız.

Çözüm:

Her iki tarafın türevi alınırsa

$$6\mathrm{yy}' + \mathrm{y} + \mathrm{xy}' + 2\mathrm{x} = 0 \Longrightarrow \mathrm{y}' = \frac{-2\mathrm{x} - \mathrm{y}}{6y + x}$$

elde edilir.

Yüksek Mertebeden Türevler

y=*f*(x) fonksiyonu verildiğinde

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

türevine y nin türevi veya y nin birinci türevi denir. Eğer y'=*f'*(x) fonksiyonu da türevlenebilir ise

$$(y')' = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x)$$

türevine y nin ikinci türevi denir. y'' ikinci türevi de türevlenebilir ise

$$\frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = y^{(3)}$$

türevine y nin üçüncü merteben türevi denir. Daha yüksek mertebeden türevler de benzer şekilde tanımlanır. Genel olarak

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

dir. Yani her mertebeden türev, bir önceki türevin türevidir.

<u>Örnek:</u>

$y = 6x^4 + \mathrm{x}^3 - 5\mathrm{x}^2$ fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevini bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

$\mathrm{y}' = 24\mathrm{x}^3 + 3\mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x}$

$\mathrm{y}'' = (\mathrm{y}')' = 72\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} - 10$

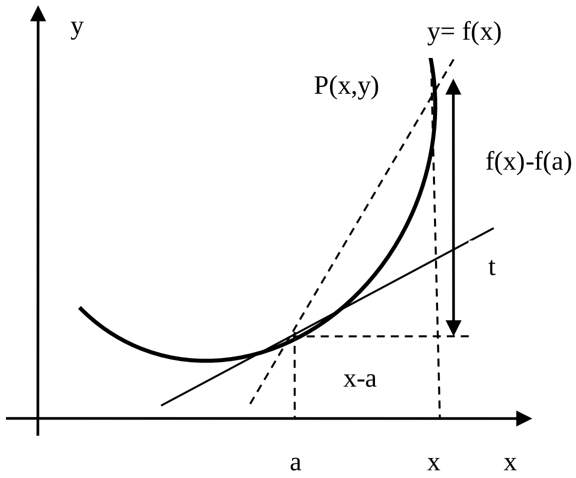
$\mathrm{y}''' = (\mathrm{y}'')' = 144\mathrm{x} + 6$

elde edilir.

TÜREVİN UYGULAMALARI

Türevin Geometrik Yorumu

$y=f(x)$ denklemi ile verilen sürekli bir f fonksiyonunun grafiği üzerinde bir A noktası alalım. Eğri üzerinde diğer bir hareketli nokta P olsun. P noktası A noktasına yaklaştığında AP kirişi konum değiştirir. P noktasının A ile çakışması durumunda AP kirişini pozisyonuna, eğrinin A noktasındaki teğeti denir.



P noktası eğri üzerinde A ya doğru hareket ettiğinde AP kirişi t teğetine yaklaşır. Şu halde x, a noktasına yaklaşırken Ap kirişi teğetine yaklaşır. x, a ile çakışırken AP kirişi de t teğeti ile çakışır. Buna göre teğetin eğimi olan m sayısı için $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

olur. Sağ taraf f nin a noktasındaki türevi olacağından $m=f'(a)$ bulunur. Bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denklemi

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

olduğundan , teğetin denklemi

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

olur.

Birinci Türevin Yorumu (Artan-Azalan Fonksiyonlar)

- *f* fonksiyonu [a,b] de sürekli ve (a,b) nin her bir noktasında türevli olsun. Her x € (a,b) için *f'*(x)>0 ise f,[a,b] de artan, *f'*(x)<0 ise *f* ,[a,b] de azalandır.

İkinci Türevin Yorumu (Konveks-Konkav Fonksiyonlar)

Tanım:(Konveks ve Konkav küme) K ⊂ R^2 olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa K ya bir konveks küme adı verilir.

f fonksiyonu [a.h] de sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer K={(x,y): x €[a,b] ve y ≥ f(x)}

kümesi , yani fonksiyonun grafiğinin üst tarafında bulunan bölge konveks ise *f* fonksiyonu **konvekstir** veya **yukarı bükümlüdür** denir. Eğer bir fonksiyon grafiğinin alt tarafında kalan bölge konveks ise eğri **konkav** veya **aşağı bükümlüdür.**

- *f* :[a,b]→R fonksiyonunun (a,b) üzerinde ikinci türevi var olsun. Eğer $\forall x \in (a,b)$ için *f''*(x)>0 ise *f* fonksiyonu [a,b] de konveks, *f''*(x)<0 ise konkavdır.

Maksimum-Minimum

- *f* :[a,b] → R fonksiyonunun bir c €(a,b) noktasında bir yerel minimumu veya maksimumu varsa *f* fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa *f'*(c)=0 dır.

- A ⊂ R kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli bir *f* fonksiyonu verildiğinde

f'(c)=0 şartını sağlayan c noktalarına *f* fonksiyonunun duraklama noktaları veya kritik noktaları denir.

- *f:* [a,b]→R fonksiyonunun kritik noktaları $c_1, c_2, \dots, c_p$, türevsiz olduğu noktalar $s_1, s_2, \dots., s_r$ ise

  $\{f(a), f(c_1), f(c_2), \dots \dots f(c_p), f(s_1), \dots \dots f(s_r), f(b)\}$

  kümesinin en büyük elemanı *f* nin mutlak maksimum (en büyük) değeri, en küçük elemanı *f* nin mutlak minimum (en küçük) değeridir.

- f fonksiyonu (a,b) aralığında türevli, c noktası f fonksiyonunun bir duraklama noktası, f''(c) mevcut ve sıfırdan farklı olsun.

  (1) Eğer $f''(c)>0$ ise c de bir yerel minimum,
  (2) Eğer $f''(c)<0$ ise c de bir yerel maximum,vardır.

Maksimum- Minimum Problemleri

Bir maksimum- minimum problemini çözmek için aşağıdaki yolu izlemek yararlı olur.

(1) Problemde verilenler değişkenlerle gösterilir.
(2) Maksimum ya da minimum olması istenen çoklukla ilgili bir ifade bulunur.
(3) Verilenler kullanılarak bazı değişkenler yok edilir. Tek değişkenli bir fonksiyon elde edilir.
(4) Probleme göre değişkenin sınırları tespit edilir.
(5) Kritik noktalar bulunur.
(6) Fonksiyonun kritik noktalar ve aralığın uç noktalarındaki değerleri bulunur.
(7) Bulunan fonksiyonun değerlerinin en küçüğü fonksiyonun en küçük değeri, en büyüğü de fonksiyonun en büyük değeridir.

BELİRSİZ ŞEKİLLER:

- Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonunun sürekli olduğu noktaya **dönüm (büküm) noktası** adı verilir.

Teorem:

- **L' Hospital Kuralı**

f ve g, a noktasında sürekli, a nın bir delinmiş komşuluğunda türevli iki fonksiyon ve bu komşuluktaki her x için $g'(x)\neq 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \ ise$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dır.

- $\frac{\infty}{\infty}$ **Belirsizlik Hali**

Bu belirsizlik halinde de L' Hospital Kuralı geçerlidir. Zira $\frac{u}{v}=\frac{1}{v}:\frac{1}{u}$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ belirsizliğe dönüşür.

- **0.∞ Belirsizlik Hali**

$u.v=\frac{u}{\frac{1}{v}}$ eşitliği yardımıyla 0.∞ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ haline getirilebilir.

- ∞-∞ **Belirsizlik Hali**

Bu belirsizlik hali, $u-v=\frac{\frac{1}{v}-\frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$ eşitliği yardımıyla $\frac{0}{0}$ belirsizlik haline dönüştürebilir.

- **0^0,∞^0,1^∞ Belirsizlik Halleri**

x sonlu bir değere veya ±∞ değerlerine yaklaştığında $y=[u(x)]^{v(x)}$ biçimindeki fonksiyonlar bu belirsizlik hallerinden birini verebilir. Bu durumda her iki tarafın logaritması alınarak

$\ln y=v(x)In\;u(x)$

eşitliği elde edilir. Sağdaki ifadenin limiti, 0.∞ belirsizliğine sahip olur. Bu limiti bilinen yolla hesaplanır.

$\lim_{x\to a}\ln y=\lambda\;\; ise\;\; \lim_{x\to a} y=e^{\lambda}$ olur.