Gauss Kanunu

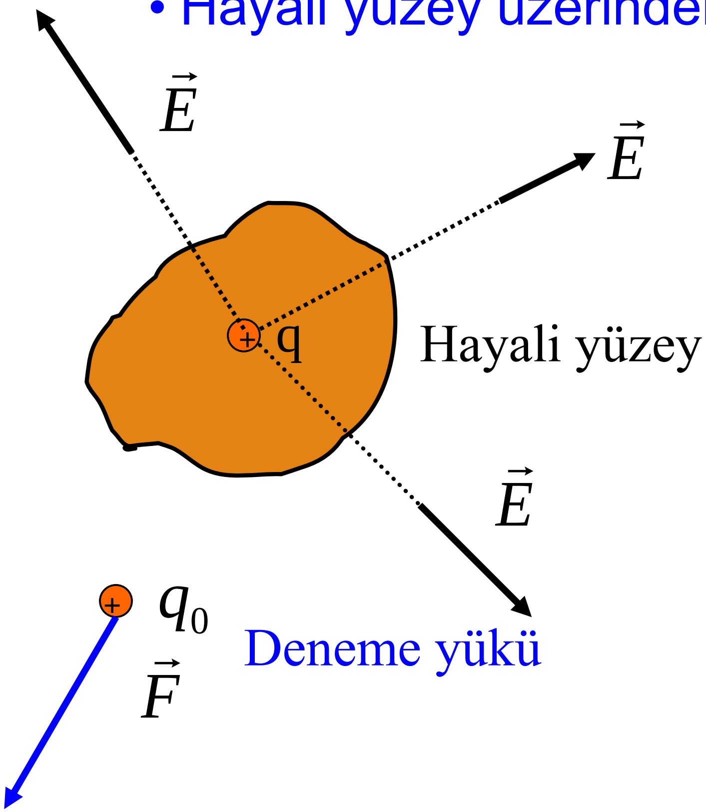
Gauss kanunu:Tanım

- Kapalı bir yüzey boyunca toplam elektrik akısı, yüzeydeki net elektrik yükünün ε_0 a bölümüne eşittir.

- Gauss kanunu Coulomb kanununa eşdeğerdir.

Gauss kanunu : Tanım

- Bir yük dağılımını düşünelim
  - Yüklerle kaplı hayali bir yüzeyle kuşatılmış olsun
  - Hayali yüzey üzerindeki çeşitli noktalarda elektrik alana bakalım

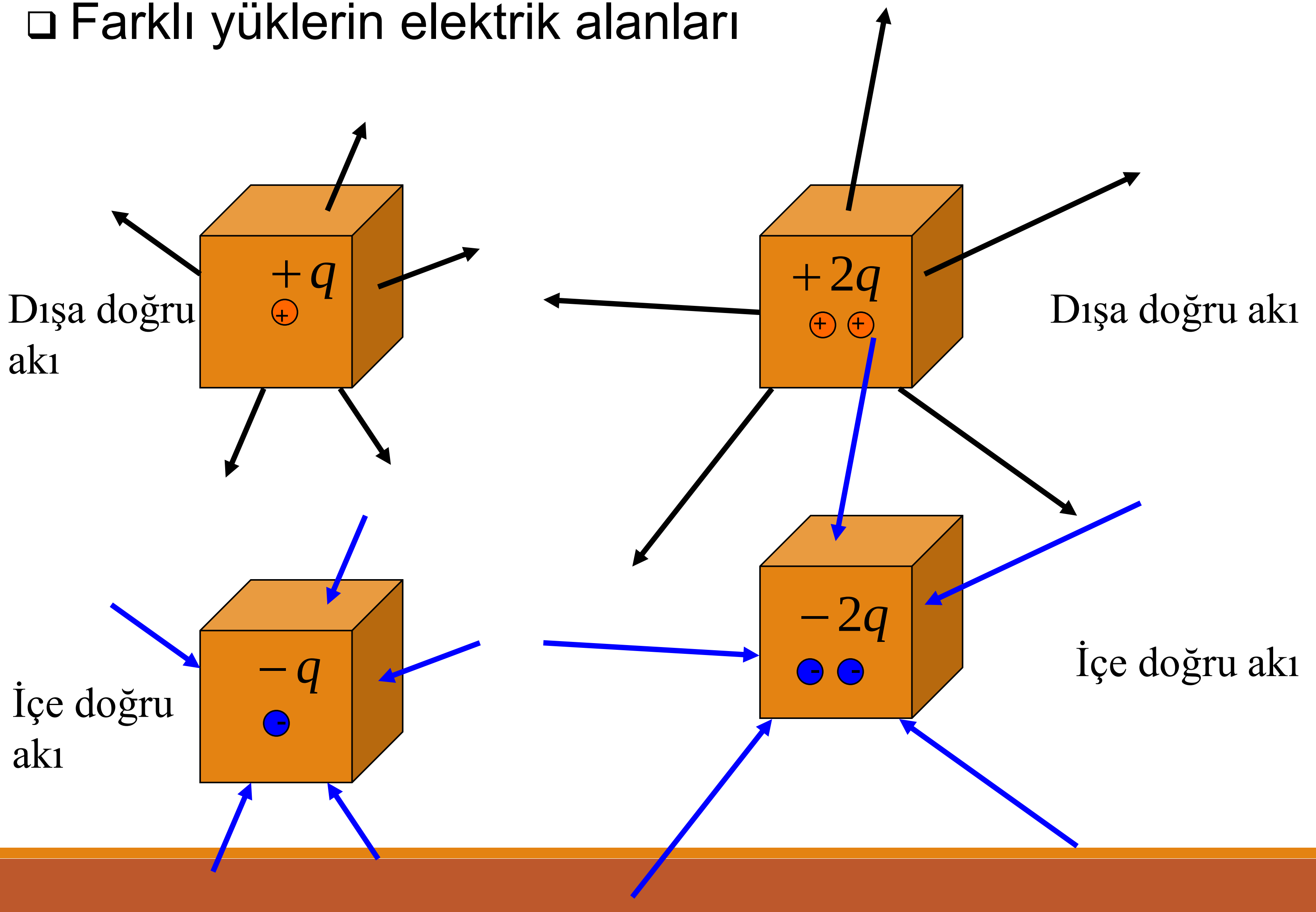


- Hayali yüzeydeki yük dağılımını ortaya çıkarmak için, özellikle yüzeydeki elektrik alanı ölçmemiz gerekmektedir.
- Bunu yapmak için yük miktarı bilinen bir deneme yükü yerleştirilir ve elektrik kuvvet ölçülür.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

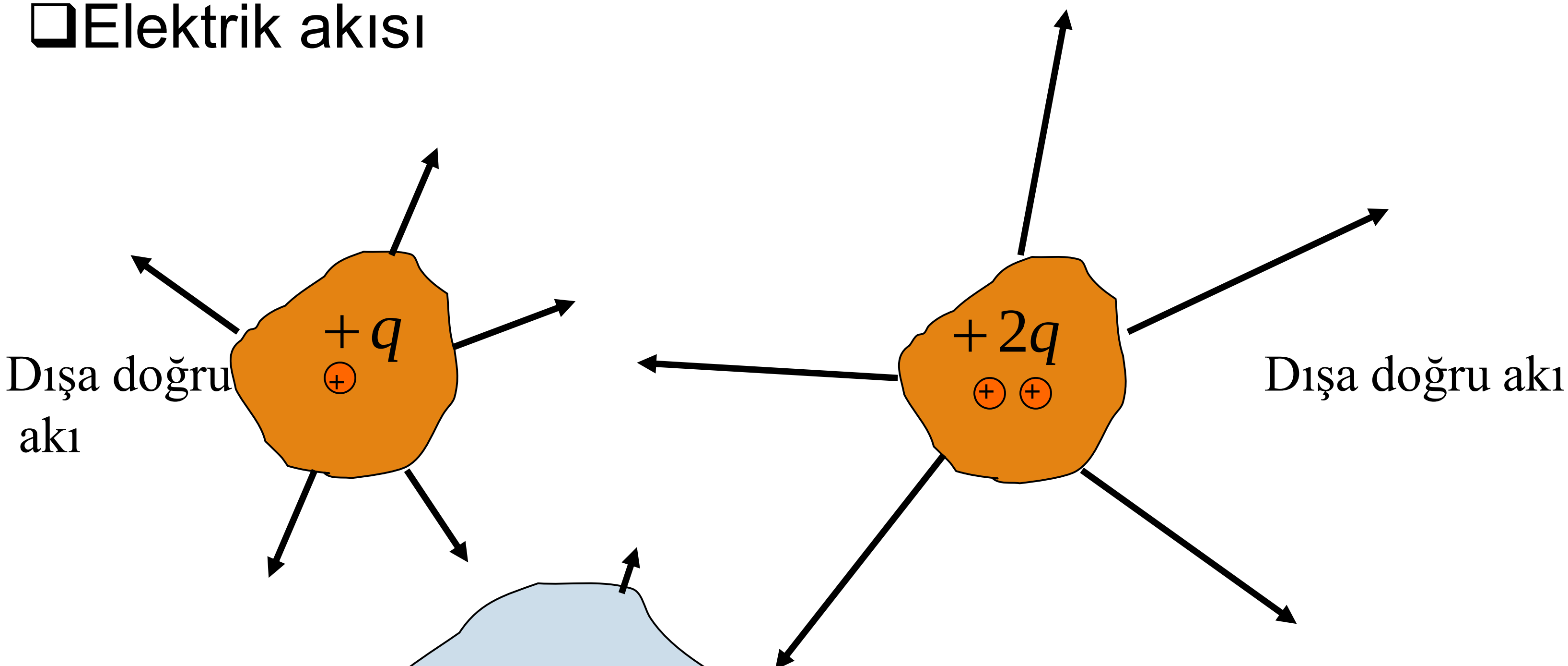
Yük ve Elektrik Akısı

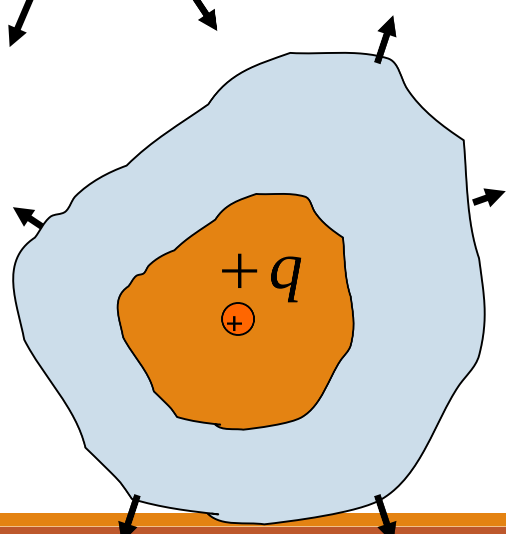
- Farklı yüklerin elektrik alanları



Yük ve Elektrik Akısı

- Elektrik akısı





Yüzeye uzaklık iki katına çıktığında
Yüzey alanı dört katına çıkar
Elektrik alan 1/4 olur.

Yük ve Elektrik Akısı

- Elektrik akısının tanımı

Yüzeyde küçük bir alan üzerindeki herhangi bir nokta için, yüzeye dik elektrik alan bileşenini ve yüzey alanı bileşenin çarpımını alırız. Böylece yüzey boyunca toplanan bu nicelik net elektrik akısını verir.

- Gauss kanununun nitel ifadesi

•Kapalı bir yüzey boyunca elektrik akısının dışa doğru mu yoksa içe doğru mu olduğu ,yüzeyi kaplayan yükün işaretine bağlıdır.

•Yüzeyin dışındaki yükler yüzey boyunca net elektrik akısı vermez.

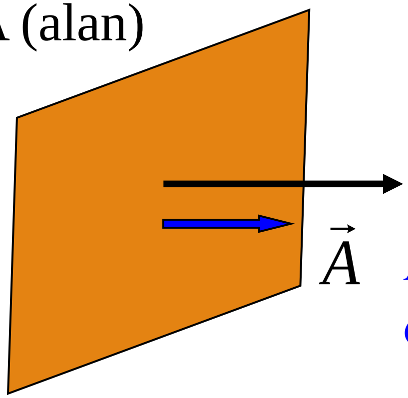
• Net elektrik akısı yüzeyle kuşatılmış olan net yük miktarıyla doğru Orantılıdır fakat bunu yanında kapalı yüzeyin boyutlarından bağımsızdır.

Elektrik Akısının Hesaplanması

- Hız alan vektörü ile elektrik akı arasındaki analoji

  Akan sıvı içindeki hız alan vektörü ve elektrik akı arasında iyi bir anoloji kurulabilir.

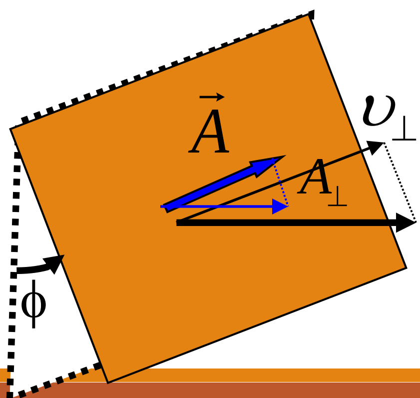
A (alan)



Hacim akış oranı: $\dfrac{dV}{dt} \equiv \upsilon A$

$\vec{\upsilon}$ Hız vektörü (akış hızı)

$\vec{A}$ Alan düzlemini belirten bir vektör alan, düzleme diktir.



Hacim akış oranı: $\dfrac{dV}{dt} = \upsilon A\cos\phi = \upsilon_\perp A = \vec{\upsilon}\cdot\vec{A}$

$= \upsilon A_\perp$

$\vec{\upsilon}$

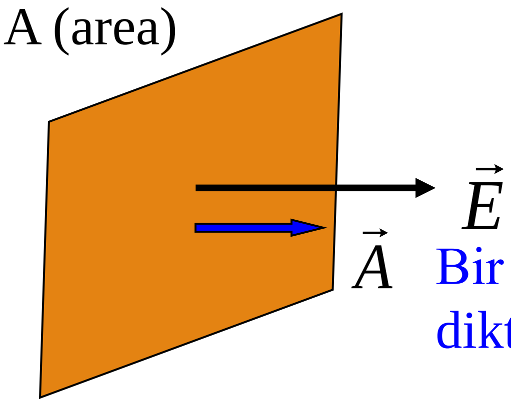
$\upsilon_\perp = \upsilon\cos\phi\,;\ A_\perp = A\cos\phi\,;\ \vec{A} = A\vec{n}$

Elektrik Akısının Hesaplanması

- Hız alan vektörü ile elektrik akı arasındaki analoji

Hacim akış oranı: $\dfrac{dV}{dt} \equiv \upsilon A$

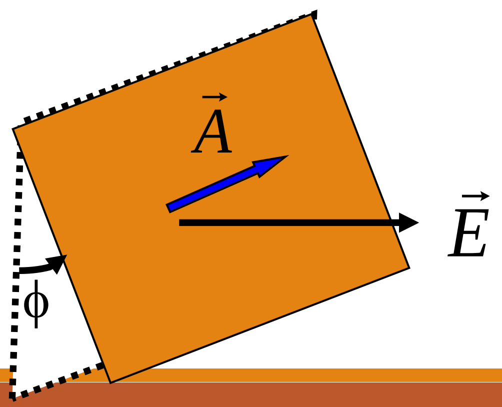
Elektrik akısı: $\Phi_E = EA$



Hız vektörü (akış hızı)

Bir alanın düzlemini tanımlayan vektör alan düzleme diktir.

$$\frac{dV}{dt} = \upsilon A\cos\phi = \upsilon_\perp A = \vec{\upsilon}\cdot\vec{A}$$



Elektrik akı: $\Phi = EA\cos\phi = E_\perp A = \vec{E}\cdot\vec{A}$

$$E_\perp = E\cos\phi\,;\; A_\perp = A\cos\phi$$

Elektrik Akısının Hesaplanması

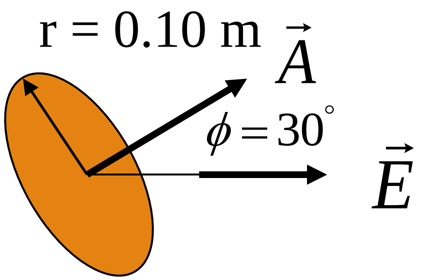
- Küçük bir alan unsuru ve Akı

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

- Bir alan için toplam akı

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \int E_\perp dA = \int E\cos\phi \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}\,;\, d\vec{A} = \vec{n} dA$$

- Örnek 22.1: Bir disk boyunca elektrik akısı



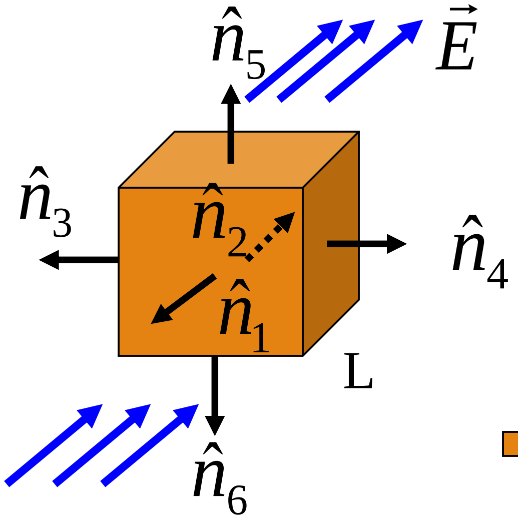
$$A = \pi(0.10\,\text{m})^2 = 0.0314\,\text{m}^2$$

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2.0\times10^3\ \text{N/C})(0.0314\,\text{m}^2)\cos 30^\circ$$

$$= 54\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

Elektrik Akısının Hesaplanması

- Örnek 22.2: Bir küp boyunca elektrik akısı



$$\Phi_{E_1} = \vec{E}\cdot\hat{n}_1 A = EL^2\cos 180^\circ = -EL^2$$

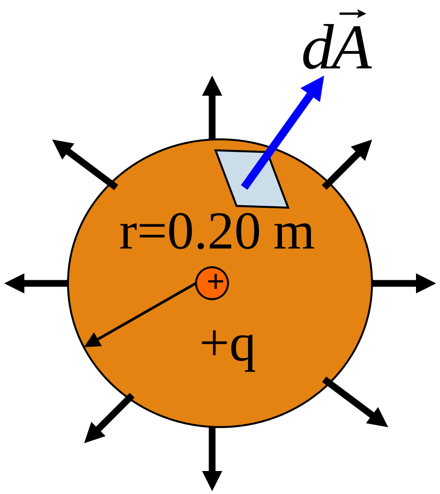
$$\Phi_{E_2} = \vec{E}\cdot\hat{n}_2 A = EL^2\cos 0^\circ = +EL^2$$

$$\Phi_{E_3} = \Phi_{E_4} = \Phi_{E_5} = \Phi_{E_6} = EL^2\cos 90^\circ = 0$$

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{i=6}\Phi_{E_i} = 0$$

Elektrik Akısının Hesaplanması

❑Örnek 22.3: Bir küre boyunca elektrik akısı



q=3.0 μC
A=2πr²

$$E_{\perp} = E, \quad \vec{E} \,//\, \hat{n} \,//\, d\vec{A}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = (9.0\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{3.0\times10^{-6}\,\mathrm{C}}{(0.20\mathrm{m})^2}$$

$$= 6.75\times10^{5}\ \mathrm{N/C}$$

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \int E dA = EA = (6.75\times10^{5}\,\mathrm{N/C})(4\pi)(0.20\mathrm{m})^2$$

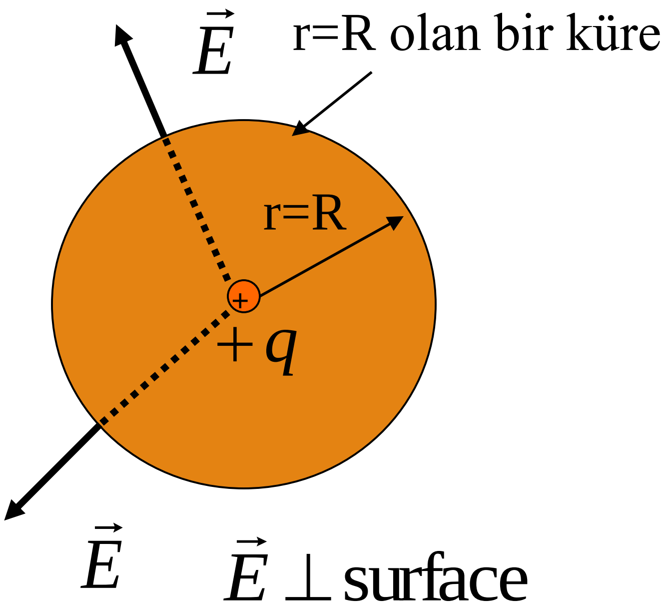
$$= 3.4\times10^{5}\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$$

Gauss kanunu

- Öncelikle :

  Herhangi bir kapalı yüzey boyunca toplam elektrik akısı (belirli bir hacimle kaplanan yüzey) yüzeydeki toplam elektrik yüküyle orantılıdır.

- Durum 1: Bir tek pozitif q yükünün alanı



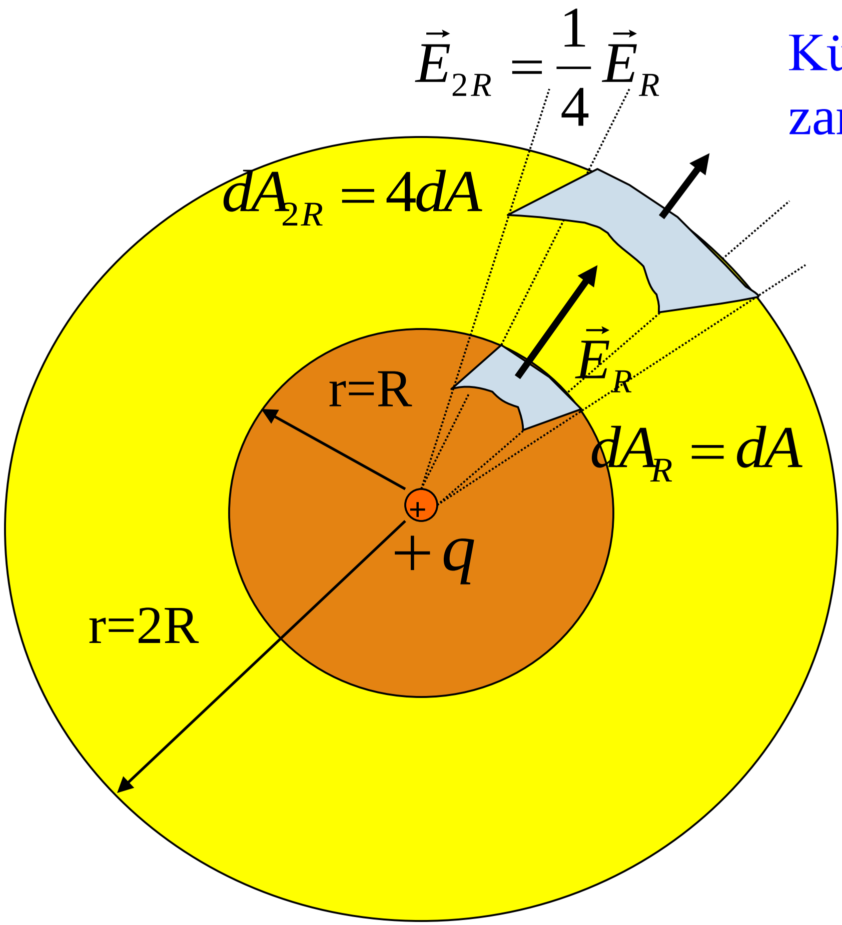
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \quad \text{at r=R}$$

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}(4\pi R^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Akı R yüzey yarıçapından bağımsızdır .

Gauss Kanunu

- Durum1: Bir tek pozitif q yükünün alanı



Küçük bir küreden geçen her alan çizgisi aynı zamanda daha büyük bir küreden de geçer

Her bir küre boyunca toplam akı aynıdır.

Benzerlik dA gibi yüzeyin her bir parçası için doğrudur.

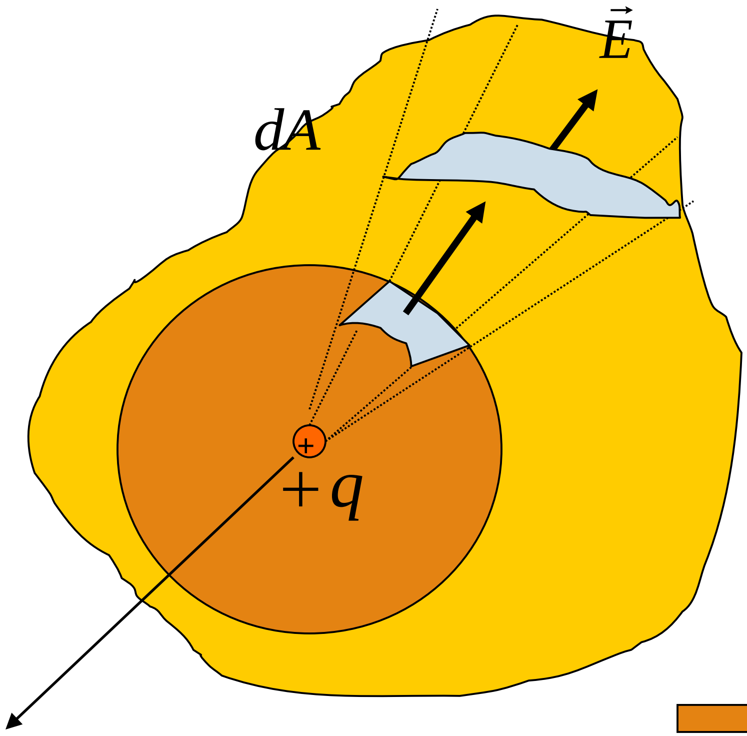
$$d\Phi_{E_R} = E_R dA_R = \frac{1}{4}E_R 4dA_R = E_{2R}dA_{2R} = d\Phi_{E_{2R}}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

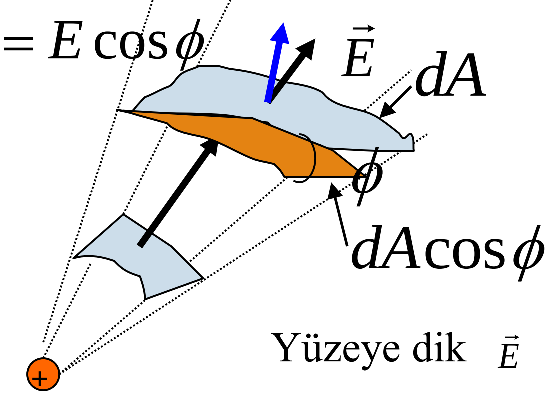
Yükü kaplayan kapalı yüzeyi sağlayan her boyut veya her şekil için bu doğrudur.

Gauss Kanunu

- Durum 2: Bir tek pozitif yükün alanı (Genel yüzey)



$$E_{\perp} = \vec{n} \cdot \vec{E}$$
$$= E \cos\phi$$

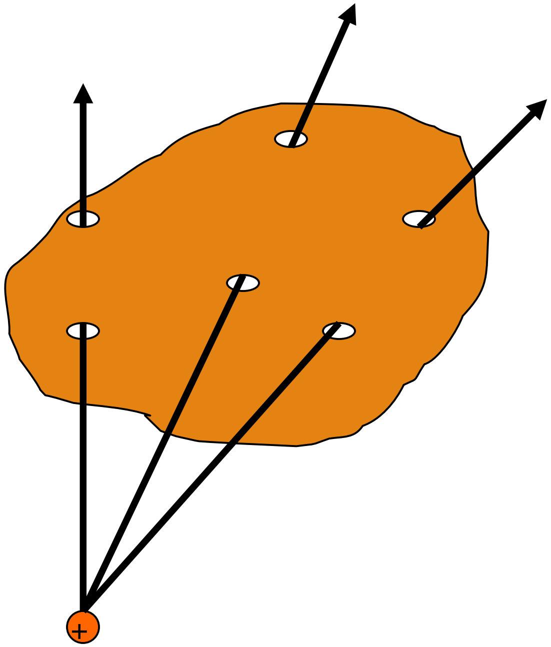


$$d\Phi_E = E_{\perp} dA = E\cos\phi dA$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Gauss kanunu

- Durum 3: İçinde yük bulunmayan kapalı bir yüzey



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

İçeri giren elektrik alan çizgileri, dışarı çıkar. Elektrik alan çizgilerinin alanın bir bölgesinde başlayabilmesi ya da bitebilmesi ancak o bölge içinde yük mevcutken olur.

Bir başka örnek 22.4

- Gauss kanunu

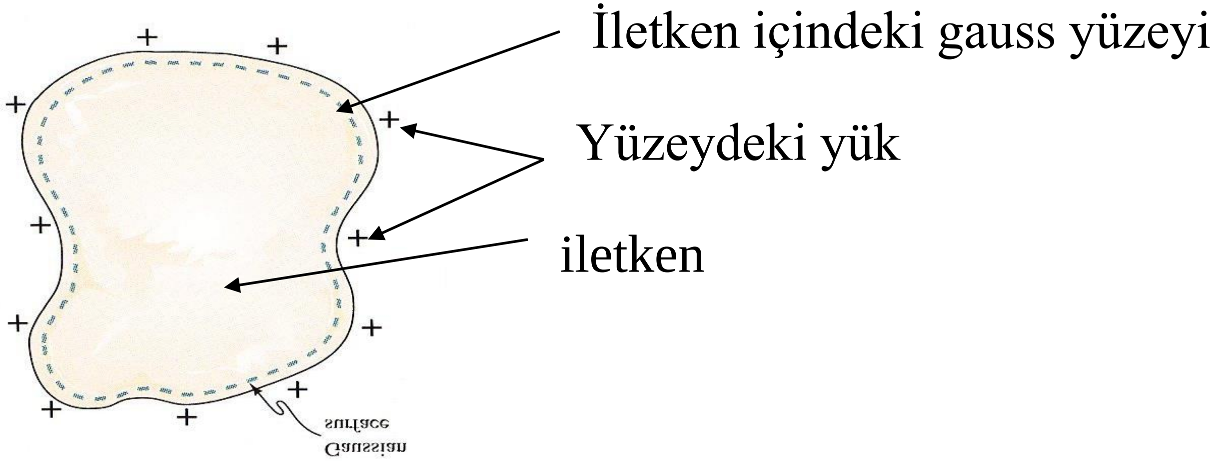
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \; ; Q_{encl} = \sum_i q_i , \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Kapalı yüzey boyunca toplam elektrik akı yüzey içindeki net elektrik yükünün ε_0 a bölümüne eşittir

Gauss kanununun uygulamaları

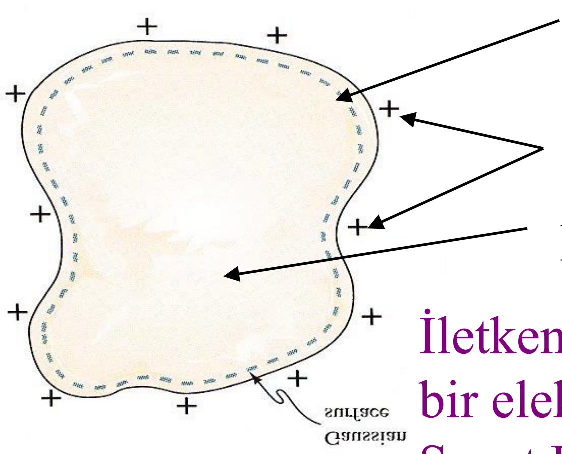
- Tanım
  - Yük dağılımı ⟷ Alan
  - Simetri uygulamanın prosedürünü kolaylaştırır.
- Bir iletken üzerindeki yük dağılımını elektrik alanı
  - Fazla yük katı iletken üzerine yerleşmişken ve sabitken, tamamen yüzeyde bulunur, bu metalin iç yükü değildir.

(fazla yük = metali iletken yapan serbest elektron ve iyonlar dışındaki yüktür.)



Gauss kanununun uygulamaları

❑İletken üzerindeki yük dağılımının elektrik alanı



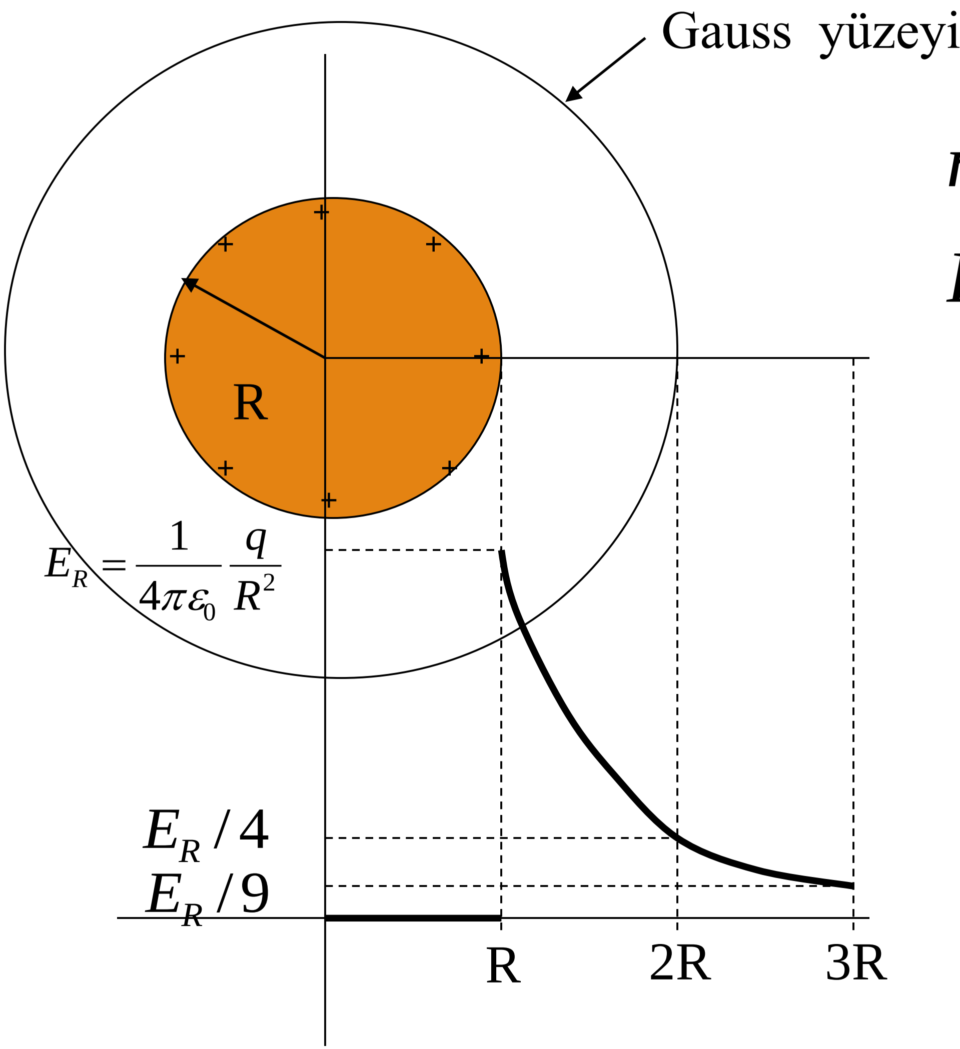
İletken metal içerisinde her noktadaki elektrik alan bir elektrostatik konumda sıfırdır. (bütün yükler hareketsizdir). Şayet E sıfır olmasaydı, yükler hareket ederdi.

- İletken içerisindeki gauss yüzeyi çizilir
- Bu yüzeyde her yerde E=0 dır (iletken içinde)
- Yüzey içindeki net yük sıfırdır.
- Katı iletken içerisinde herhangi bir noktada hiçbir fazla yük olmayabilir.
- Her bir fazla yük iletken yüzeyinde bulunmalıdır.
- Yüzeydeki E yüzeye diktir.

Gauss kanunu

Gauss kanununun uygulamaları

❑örnek 22.5: Yüklü iletken kürenin alanı



$r < R: \quad \vec{E} = 0$

$R < r:$ Küre dışında bir Gauss yüzeyi çizilir

$Q_{elcl} = q, \; A = 4\pi r^2$

$E =$ **Küre yüzeyi üzerinde sabittir.**

$\vec{E} =$ **Küre yüzeyine diktir.**

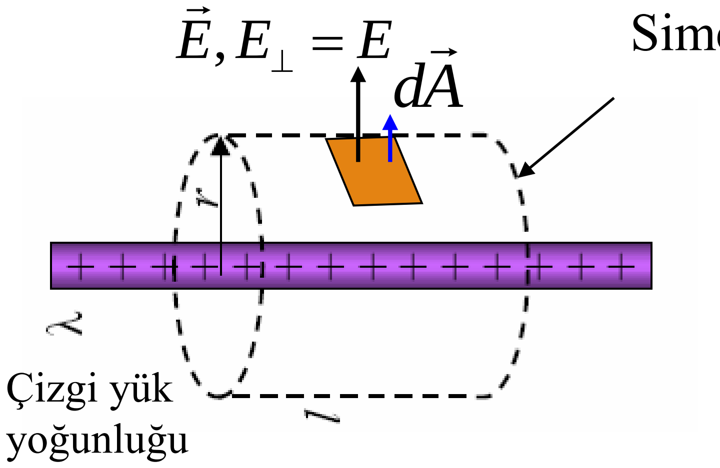
Gauss kanunundan

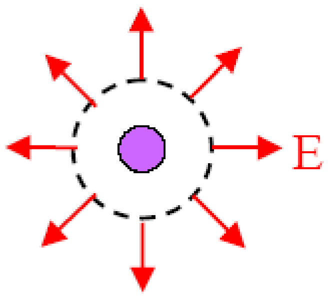
$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$r = R: \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

Gauss kanununun uygulamaları

- Örnek 22.6: Çizgi yükün alanı





$$Q_{encl} = \ell\lambda$$

Silindirik gauss yüzeyinde $E_{\perp} = E$

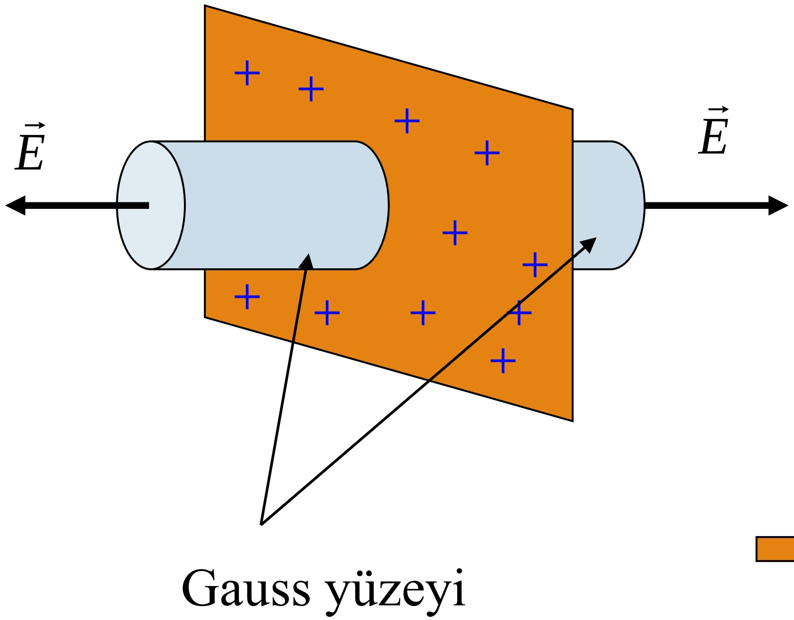
$$\Phi_E = E(2\pi r\ell) = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Gauss kanununun uygulamaları

❑Örnek 22.7: Yüklü sonsuz düzgün bir levhanın alanı

σ : Yük yoğunluğu



$\vec{E} \perp$ **Levha** $\rightarrow E_{\perp} = E$

$$Q_{encl} = \sigma A$$

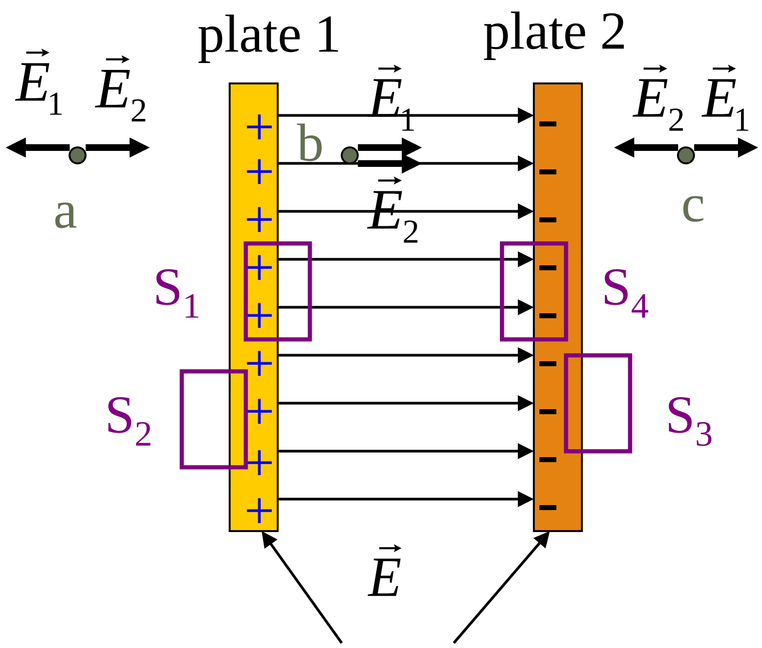
İki sonlu yüzey

$$\Phi_E = 2(EA) = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Gauss kanununun uygulamaları

- Örnek 22.8: Zıt yüklü paralel iletken plakalar arasındaki alan



Bu yüzeyler üzerinde elektrik akı yok

Çözüm 1:

$$S_1: \quad EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{Sağ yüzey})$$

Dışa doğru akı

$$E = 0 \quad (\text{Sol yüzey})$$

$$S_4: \quad -EA = \frac{-\sigma A}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{Sol yüzey})$$

İçe doğru akı

$$E = 0 \quad (\text{Sağ yüzey})$$

Çözüm 2:

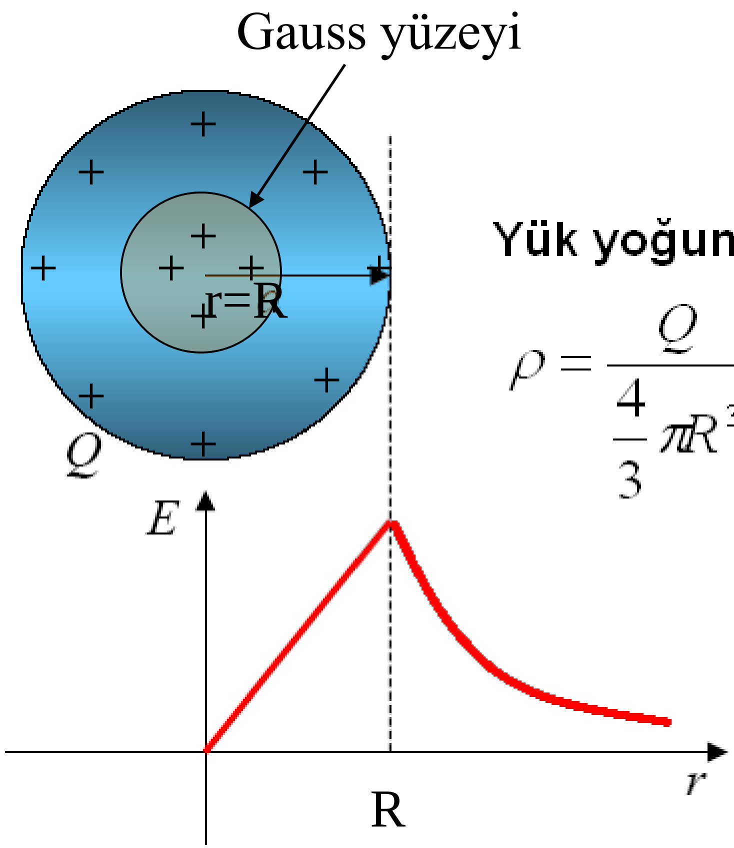
Noktada a : $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$

b : $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 \rightarrow \vec{E} = 2\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

c : $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$

Gauss kanununun uygulamaları

- Örnek 22.9: Düzgün bir şekilde yüklü kürenin alanı



Yük yoğunluğu

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$r < R: \quad EA = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)/\varepsilon_0$$

$$E(4\pi r^2) = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)/\varepsilon_0$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$

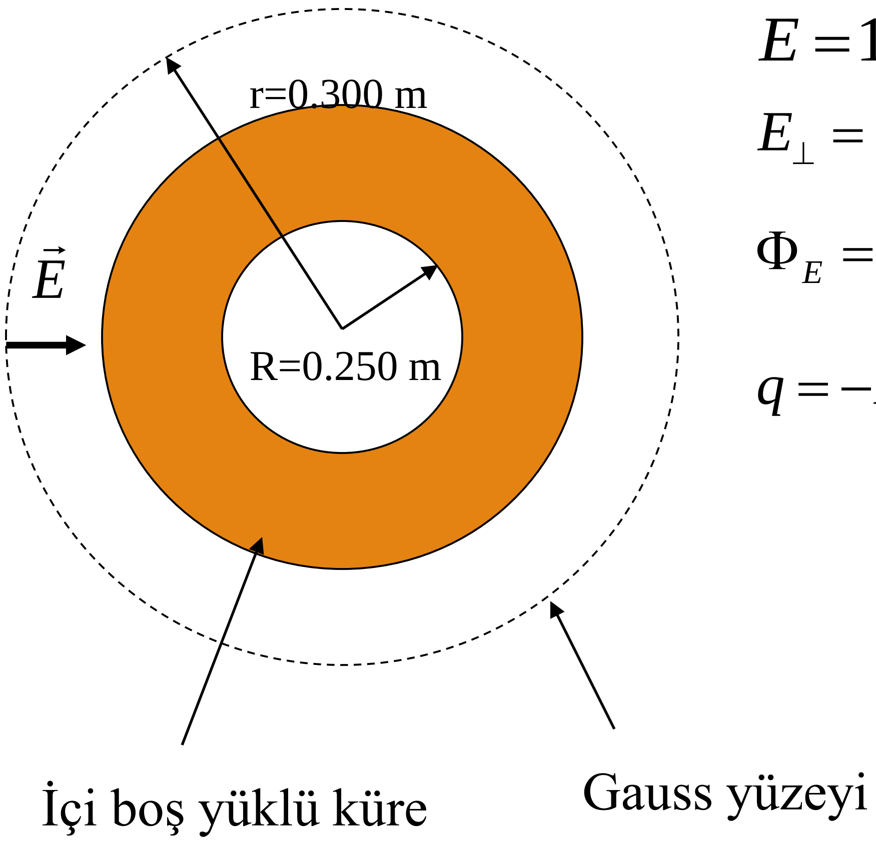
$$r = R: \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

$$R < r: \quad E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Gauss kanununun uygulamaları

- Örnek 22.10: Yüklü içi boş kürenin alanı



$$E = 1.80\times10^{2}\ \mathrm{N/C}$$

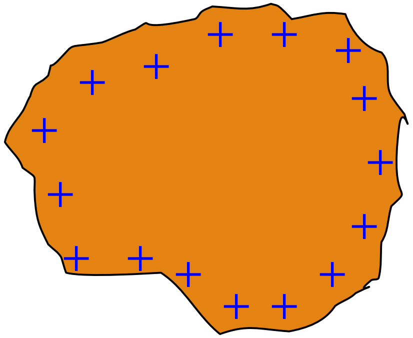
$$E_{\perp} = -E$$

$$\Phi_{E} = \oint E_{\perp}dA = -E(4\pi r^{2}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$q = -E(4\pi\varepsilon_0 r^{2}) = -0.801\,\mathrm{nC}$$

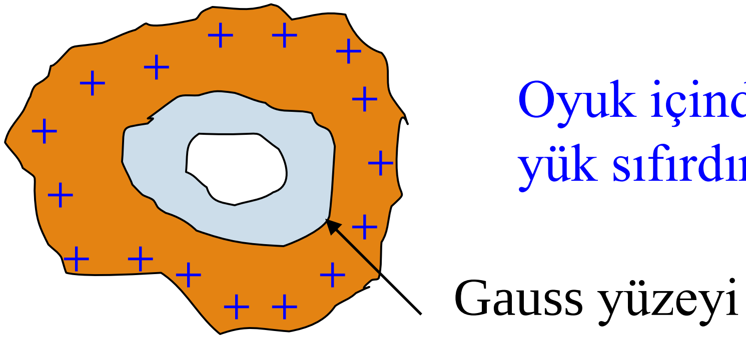
İletkenler üzerindeki yükler

- Durum 1: Katı iletken üzerindeki yük elektrostatik bir durumdaki İletken yüzeyinde bulunur.



İletken içerisinde her noktada elektrik alan sıfırdır ve
Katı iletken üzerindeki her bir fazla yük
onun yüzeyi üzerine yerleşir.

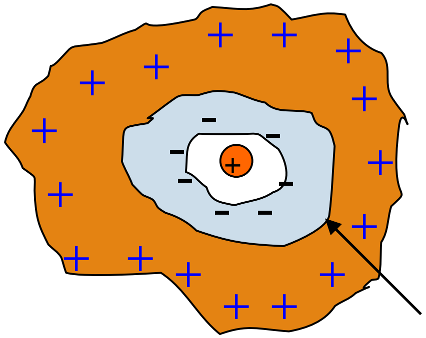
- Durum 2: Oyulmuş iletken üzerindeki yük



Oyuk içinde yük yoksa, oyuk yüzey üzerindeki net yük sıfırdır.

İletkenler üzerindeki yükler

❑Durum 3: Oyuklu bir iletkenin yükü ve oyuk içindeki q yükü



Gauss yüzeyi

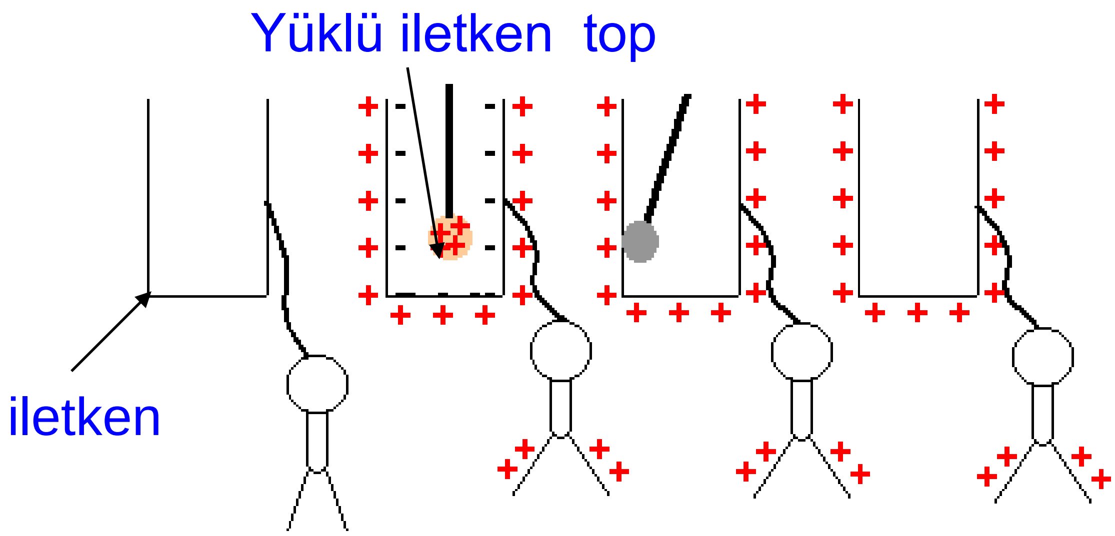
•İletken yüklenmemiştir ve q yükünden yalıtılmıştır.

•Gauss yüzeyindeki toplam yük Gauss kuralı ve yüzeyde E=0 olduğundan sıfır olmalıdır.Bu yüzden boşluğun yüzeyinde yüzeye dağılmış –q yükü olmalıdır

•Benzer tartışma başlangıçta q_C yüküne sahip iletken durumu için kullanılabilir.Bu durumda dış yüzeydeki toplam yük oyuk içine koyulan q yükünden sonra $q+q_C$ olmalıdır

İletkenler üzerindeki yükler

- Faraday ın buz kovası deneyi

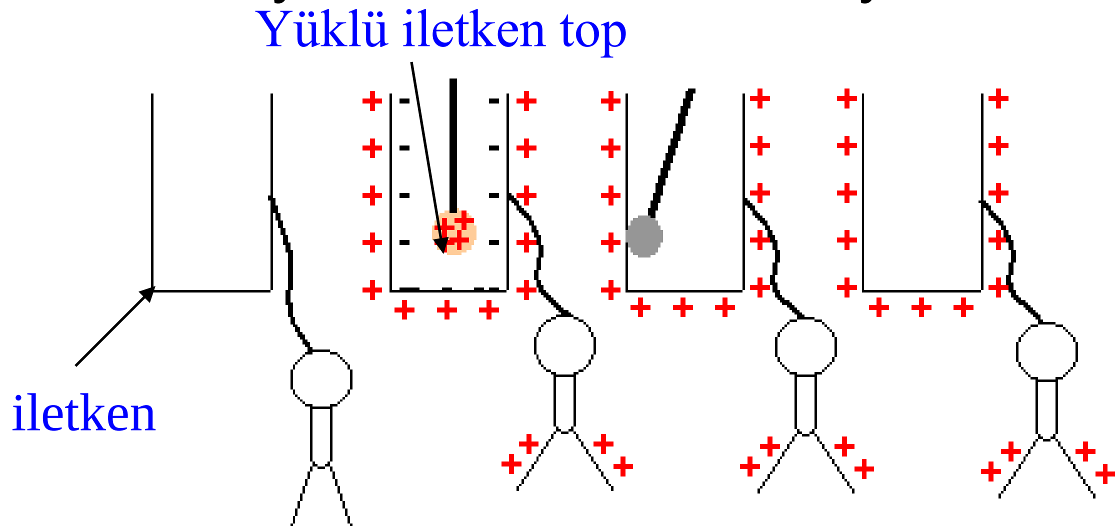


(1) Faraday yüksüz metal buz kovası(metal kova) ve yüksüz elektroskop ile işe başladı

(2) Daha sonra, dikkatli bir şekilde kovanın yanlarına dokundurmadan buz kova içerisine metal topu sarkıttı. Elektroskop' un yaprakları ayrıldı.
Bununla birlikte, ayrılma derecesi metal topun yerleşiminden bağımsızdır. Sadece metal top tamamen geri çekildiğinde yaprakları eski pozisyonuna geri döner.

İletkenler üzerindeki yükler

- Faraday ın buz kovası deneyi



(3) Faraday şayet metal topun buz kovanın yüzeyi içine kontak etmesine müsaade edilseydi elektroskop'un yapraklarının ayrı kalacağına dikkat çekti.

(4) Daha sonra , buz kova içerisinden topu tamamen çıkardığında, yapraklar ayrı kaldı. Bununla birlikte, metal top artık yüksüzdür.

Bunun için küreye dıştan bağlı olan elektroskobun yaprakları, top kürenin içerisine dokundurulduğunda, hareket etmedi , böylece Faraday topu nötürleştirmek için iç yüzeyin yeterince yüke sahip olduğunu buldu.

İletkenler üzerindeki yükler

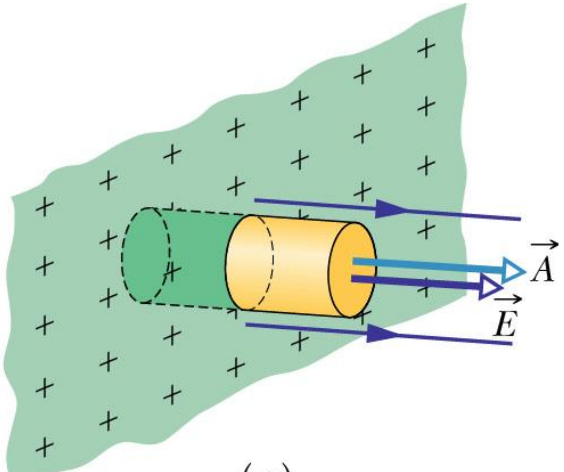
❑ Bir İletken yüzeyindeki alan

- İletken dışındaki elektrik alanın büyüklüğü $\boldsymbol{\sigma}$ /$\boldsymbol{\varepsilon_0}$ dır ve yüzeye dik yönlendirilmiştir.

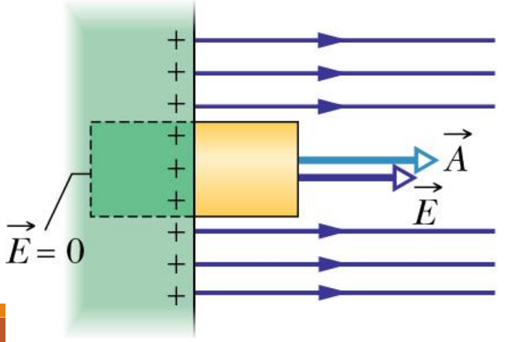
İletken içine ilerleyen küçük bir hap kutu çizilir. içerde alan olmadığı için , bütün akılar üst taraftan çıkar.

$EA=q/\varepsilon_0= \sigma A/ \varepsilon_0,$

$\mathbf{E}= \boldsymbol{\sigma} / \varepsilon_0$



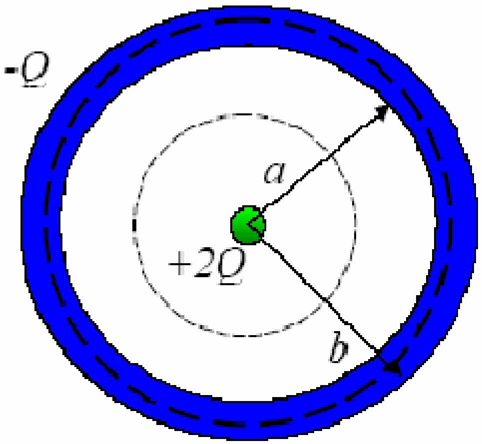
(a)



(b)

- Alıştırma 1

$-Q$ net yükü ile b dış yarıçaplı ve a iç yarıçaplı iletken bir silindirik kabuk $+2Q$ nokta yüklü merkeze sahiptir. Her yerdeki elektrik alanı bulmak için küresel kabuk üzerindeki yük dağılımına karar vermek için Gauss kanunu kullanılır.



öncelikle $0 < r < a$ için alan bulunur.

Bu örnek 2 deki ile aynıdır ve $+2Q$. yüklü bir nokta yükden dolayı alandır.

$$E = k_e \frac{2Q}{r^2}$$

Bu $+2Q$ yüklü bir nokta yükten dolayı olan alanla aynıdır.

$a < r < b$ için alan bulunur.

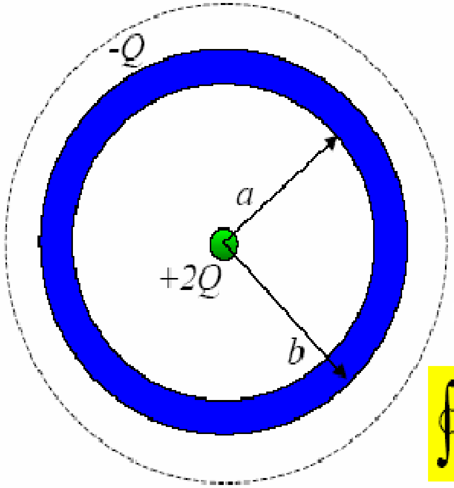
Dengedeki bir iletken içerisindeki alan sıfır olmalıdır.

Gauss kanunundan bu Q_{in} sıfırdır.

Nokta yükten bir $+2Q$ vardır. Bu yüzden küresel kabuğun iç yüzeyinde $Q_a = -2Q$ ye sahip olmalıyız. Kabuk üzerinde net yük olduğu için dış yüzey üzerindeki yükü şu şekilde bulabiliriz.

$Q_{net} = Q_a + Q_b$. $\quad Q_b = Q_{net} - Q_a = -Q - (-2Q) = +Q$.

❑ Alıştırma 1



$r > b$ için alanı bulalım

Simetri problemi küresel gauss yüzeyine her noktada dik olan ve radyal olan bu bölgedeki alan anlamına gelir.Bu yüzden , alan, Gauss yüzeyinde her noktada aynı değere sahiptir bu nedenle çözüm tam olarak örnek 2 deki gibi ilerler fakat $Q_{in}=2Q-Q$.

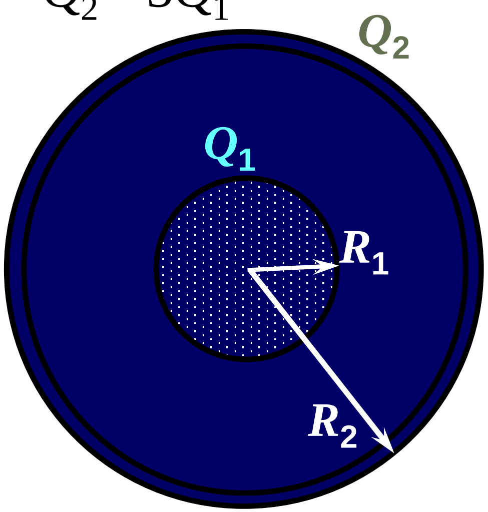
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_S E dA = E\oint_S dA = E(4\pi r^2)$$

Gauss kanunundan:

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2Q-Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{or} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = k_e\frac{Q}{r^2}$$

❑Alıştırma 2: Bir küre ve bir iletken kabuk

$Q_2=-3Q_1$



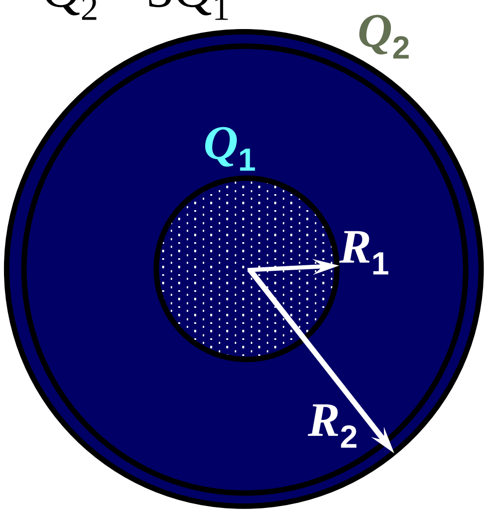
• Gauss kanunundan iletken içerisinde net yük olmaz, ve yük küre yüzeyi dışında bulunmalıdır.

• Küre içinde net yük olmaz.
Bu yüzden kabuk yüzeyine $-Q_1$ net yükü götürülmelidir ve yüzeyin dışına $+Q_1+Q_2$ net yükü götürülmelidir. Böylece kabuk üzerinde net yük Q_2 ye eşittir. Bu yükler düzenli bir şekilde dağılır.

$$\sigma_{inner} = -\frac{Q_1}{4\pi R_2^2} \qquad \sigma_{outer} = \frac{Q_2 + Q_1}{4\pi R_2^2} = \frac{-2Q_1}{4\pi R_2^2}$$

- Alıştırma 2: Bir küre ve bir iletken kabuk

Q_2=-3Q_1



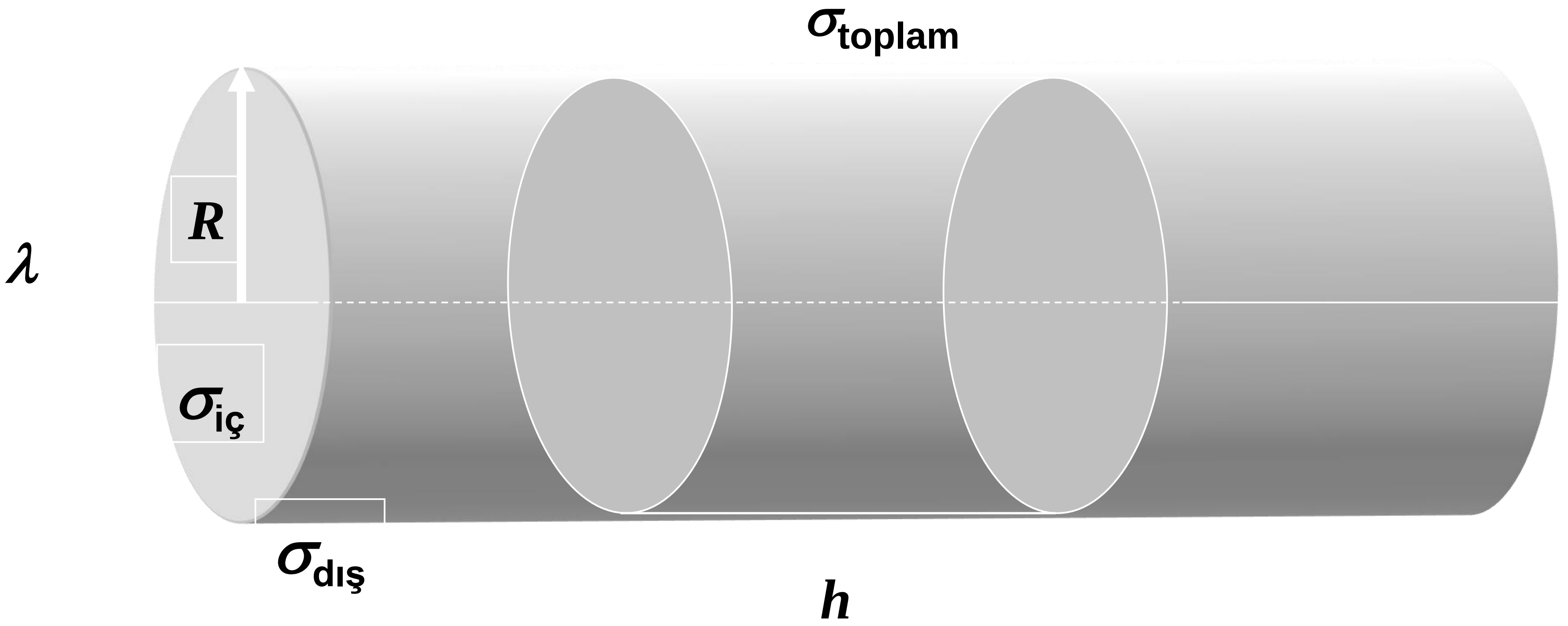
$$r < R_1 : \qquad \vec{E} = 0$$

$$R_1 < r < R_2 : \qquad \vec{E} = k\frac{Q_1}{r^2}\hat{r}$$

$$R_2 < r : \qquad \vec{E} = k\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}\hat{r} = -k\frac{2Q_1}{r^2}\hat{r}$$

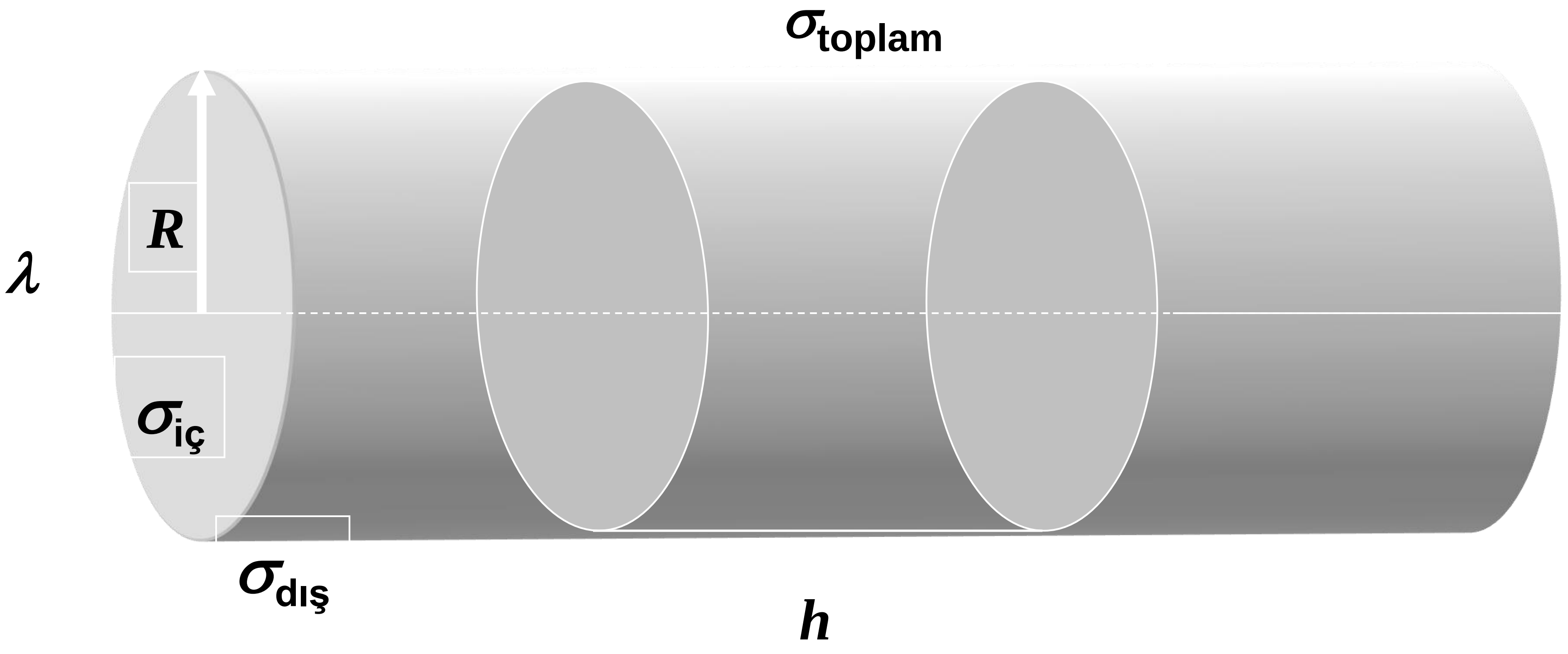
❑Alıştırma 3: Silindir

Sonsuz bir çizgi yük yarıçapı R olan içi boş yüklü iletken sonsuz bir silindiriksel kabuğun tam olarak ortasından geçer. Şimdi uzunluğu h olan silindirik kabuğun bir parçasına odaklanalım. Çizgi yük λ lineer yük yoğunluğuna sahiptir, ve silindirik kabuk σ_{total} yüzey yük yoğunluğuna sahiptir.



❑Alıştırma 3: Silindir

Silindirik kabuk içinde elektrik alan sıfırdır. Bu yüzden silindirde silindir kabuk içinde bulunan bir gauss yüzeyi seçersek , kuşatılmış net yük sıfır olur. Çizgi boyunca dış yükü dengelemek için silindir duvar içinde bir yüzey yük yoğunluğu mevcuttur.

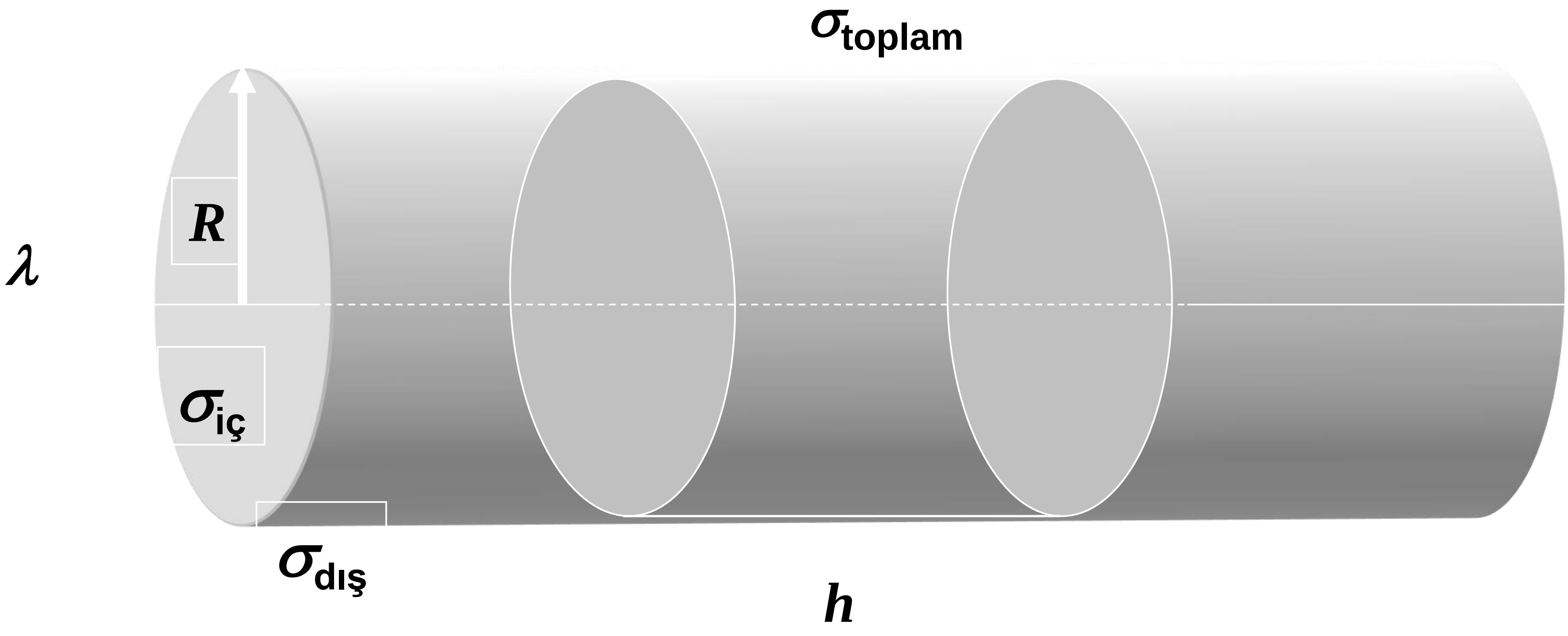


❑ Alıştırma 3: Silindir

•Çizgi yükün kuşatılmış parçası (h uzunluğu) üzerindeki toplam yük : λh

• İletken silindir kabuğun yüzeyi içindeki yük: $Q_{inner} = -\lambda h$

$$\sigma_{inner} = \frac{-\lambda h}{2\pi R h} = -\frac{\lambda}{2\pi R}$$

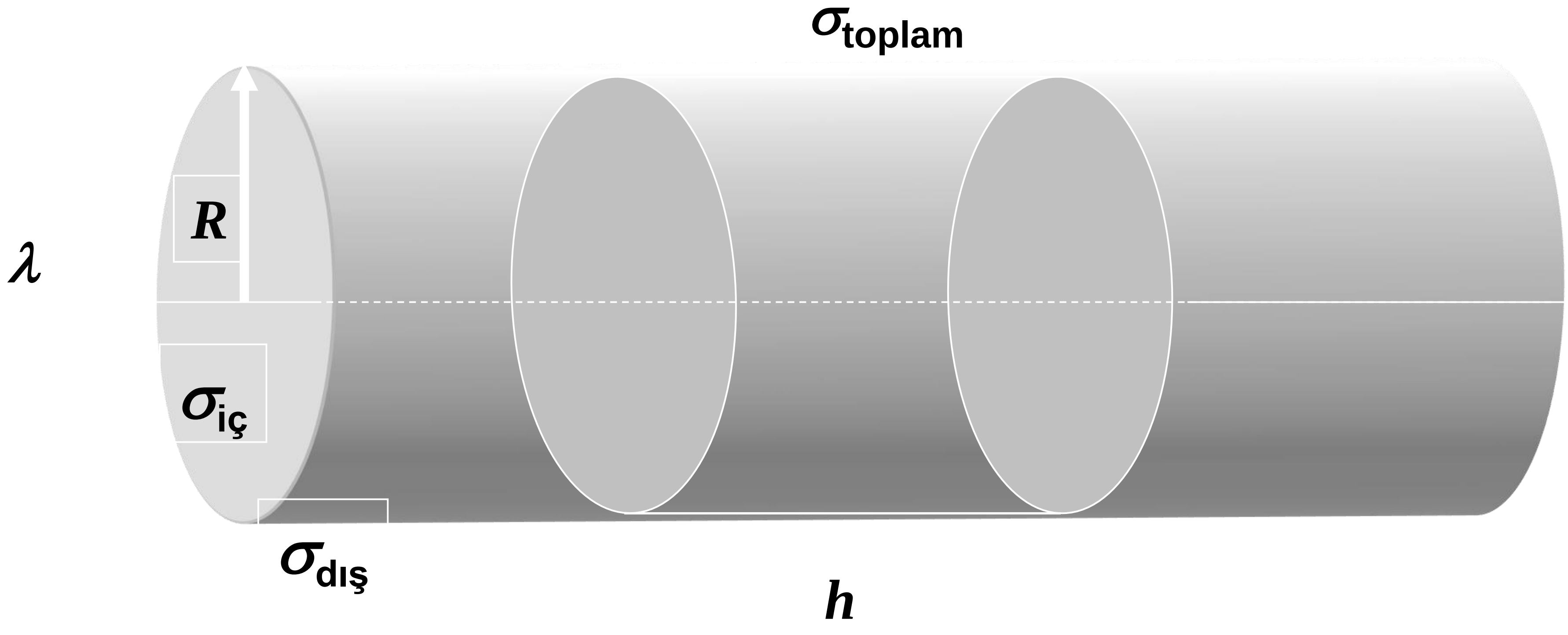


❑ Alıştırma 3: Silinidir

- Silindir üzerindeki net yük yoğunluğu: σ_{total}

- Harici yük yoğunluğu : σ_{outer}

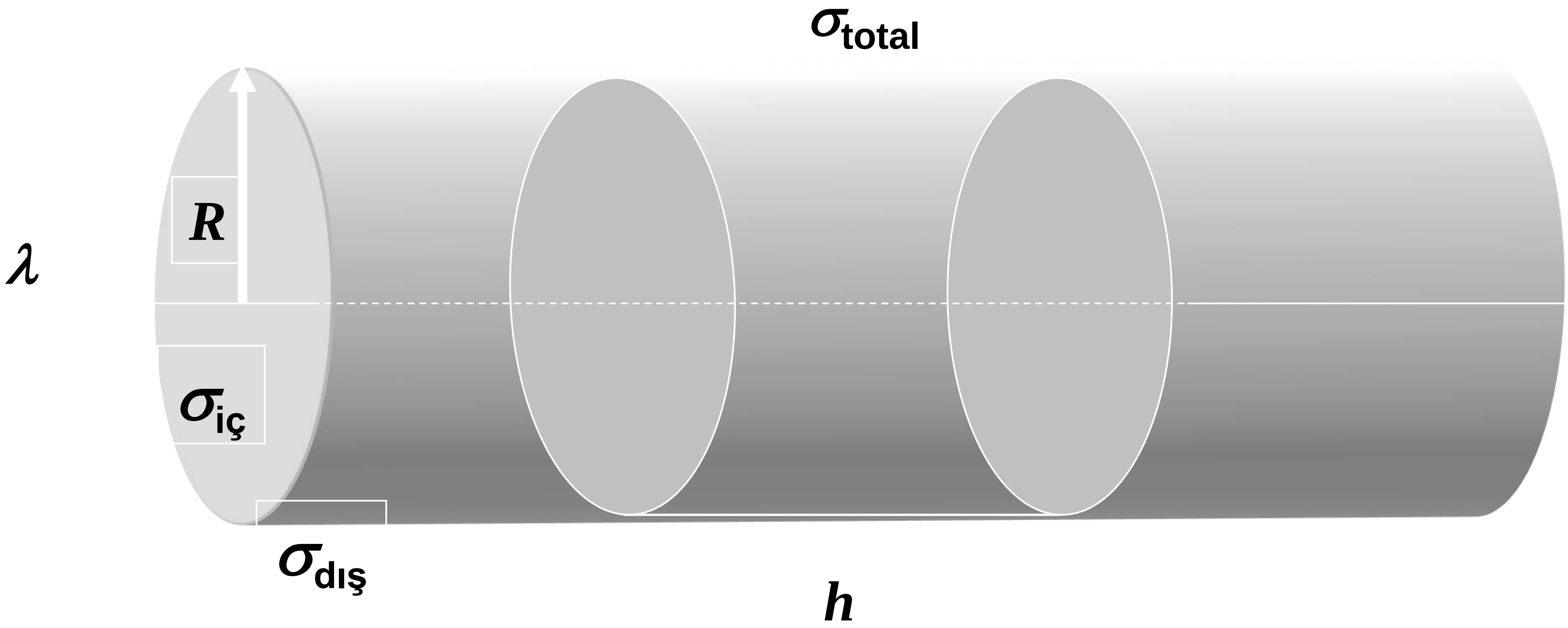
$$\sigma_{outer} = \sigma_{total} - \sigma_{inner} = \sigma_{total} + \frac{\lambda}{2\pi R}$$



❑ Alıştırma 3: Silindir

- r (>R) yarıçaplı çizgi yükle çevrelenen Gauss yüzeyini çizelim;

$$2\pi r h E_r = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_0}, q_{encl} = \lambda h \rightarrow E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{for r < R}$$



❑Alıştırma 3: Silindir

•r (>R) yarıçaplı çizgi yükle çevrelenen Gauss yüzeyini çizelim;

•Çizgi üzerindeki net yük: λh kabuk boyunca net yük: $Q = 2\pi R h \sigma_{total}$

$$2\pi r h E_r = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_0}, q_{encl} = Q + \lambda h \rightarrow E_r = \frac{\sigma_{total}}{\varepsilon_0}\frac{R}{r} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{for } r > R$$