İndüksiyon

Öz indüktans

- Öz indüklenme

Bir akım bir devrede aktığında, bu akım kendi devresine bağlı bir manyetik akı meydana getirir.Bu, öz indüklenme olarak adlandırılır.('indüklenme' manyetik akı Φ_B için en eski kelimedir)

Devrede B nin büyüklüğü her yerde I ile orantılıdır bu yüzden şunu yazabiliriz:

$$\Phi_B = LI$$

L devrenin öz indüklenmesi olarak adlandırılır.

L devrenin şekline ve boyutuna bağlıdır. Üstelik I = 1amperken bu , Φ_B manyetik akısına eşit olarak düşünülebilir.

İndüktans birimi Henry dir.

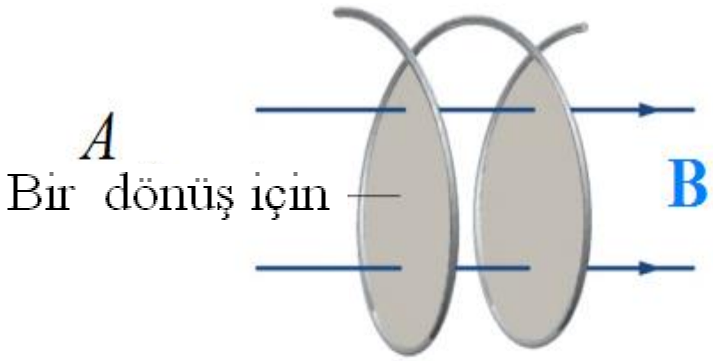
$$1\,\mathrm{H} = 1\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\,\frac{\mathrm{T\,m^2}}{\mathrm{A}}$$

Öz indüktans

❑ Öz indüktansın hesaplanması : Bir solenoit

L nin doğru hesaplanması genelde zordur ,tele yakınlarda B güçlendiği için, çoğunlukla cevap telin kalınlığına da bağlıdır.

Solenoitin önemli durumunda , ilk olarak L için yaklaşık sonuç elde etmek oldukça kolaydır: İlk olarak biz aşağıdaki ifadeyi elde ettik.



$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \qquad \text{böylece} \qquad \Phi_B = NAB = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} I$$

Sonra ,

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} = \mu_0 n^2 A\ell$$

n : Birim uzunluk başına dönüş sayısı

Bu yüzden L n^2 ve solenoitin hacmi ile orantılıdır

Öz İndüktans

- Öz indüktansın hesaplanması : Bir solenoit

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} = \mu_0 n^2 A \ell$$

n : Birim uzunluk başına dönüş sayısı

Örnek :Toplam 100 dönüşlü ,5 cm^2 alanlı 10 cm uzunluklu solenoitin L si:

$$L = 6.28 \times 10^{-5}\ \mathrm{H}$$

0.5 mm çaplı tel tek bir katta 100 dönüş yapacaktır.

10 tabaka gidildiğinde L 1 faktörden 100'e artacaktır.Aynı zamanda demir yada ferrit çekirdek eklendiğinde L bir faktörden 100'e artacaktır.

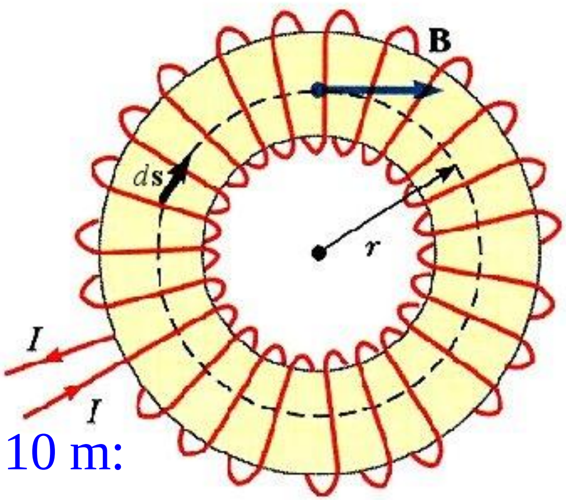
L için ifade H/m birimine sahip μ_0 ı gösterir, c.f, Tm/A ilk olarak elde edilir.

Öz indüktans

❑ Öz indüktansın hesaplanması : : Bir toroitsel solenoit

Solenoit içindeki manyetik akı :

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NIA}{2\pi r}$$



Sonra solenoitin öz indüktansı :

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2 A}{2\pi r} = \mu_0 n^2 A(2\pi r)$$

Şayet N = 200 dönüşse, A = 5.0 cm^2 , ve r = 0.10 m:

$$L = \frac{[4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Wb/(A \cdot m)}](200)^2(5.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2)}{2\pi(0.10\,\mathrm{m})}$$

$$= 40 \times 10^{-6}\ \mathrm{H} = 40\ \mu\mathrm{H}.$$

Daha sonra öz indüklemede akım, 3.0 μs, de 0.0 dan 6.0 A ya düzgün bir şekilde arttığında emk ☜ aşağıdaki gibi olacaktır:

$$|\varepsilon| = L\left|\frac{dI}{dt}\right| = (40 \times 10^{-6}\ \mathrm{H})(2.0 \times 10^{6}\ \mathrm{A/s}) = 80\,\mathrm{V}. \qquad (\because \varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt})$$

Öz indüktans

- Manyetik alanda depolanan enerji

Niçin L ilginç ve çok önemli bir niceliktir .

Bu , devrenin B alanında depolanan toplam enerji ile ilişkisinden kaynaklanır ki bunu aşağıda kanıtlamamız gerekir.

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

I ilk olarak meydana geldiğinde, bir sınıra sahibiz.

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{dI}{dt} = -\varepsilon \qquad \text{(özindüklenme emk)}$$

I nın kaynağı I yı son değere çıkardığı için özindüksiyon emk sına karşı iş yapar

$$\frac{dU_m}{dt} = \varepsilon I = LI\frac{dI}{dt} \qquad \text{Güç = Birim zamanda yapılan iş}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{U_m} dU_m = L\int_0^I I\,dI = \frac{1}{2} L I^2 = U_m$$

Öz indüktans

- Manyetik alanda depolanan enerji: Örnek

İndüktansta depolanan enerji için bizim ifademize dönersek onu bir solenoit durumu için kullanabiliriz. Zaten formülü kullanarak solenoit için elde ettik.

$$B = \mu_0 n I$$

ve

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 n^2 A\ell$$

Böylece :

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 A\ell \left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A\ell$$

Alanda birim hacimdeki enerji

$$u_m = \frac{U_m}{A\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Öz indüktans

- İndüktör

Belirli bir indüktansa sahip olarak dizayn edilmiş bir devre cihazı bir indüktör yada bir bobin olarak adlandırılır.Yaygın sembolü aşağıdaki gibidir:

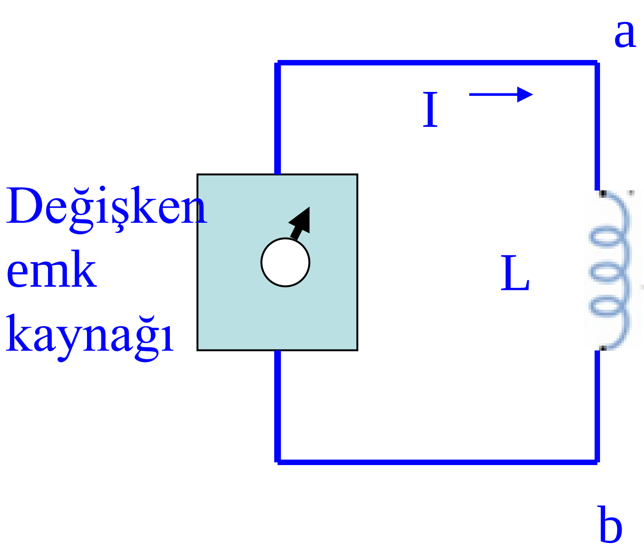
$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{dI}{dt}$$

$dI/dt > 0$ ise,

$V_{ab} > 0$ a' dan b' ye potansiyel düşer.

$dI/dt < 0$ ise,

$V_{ab} < 0$ a'dan b'ye potansiyel artar.

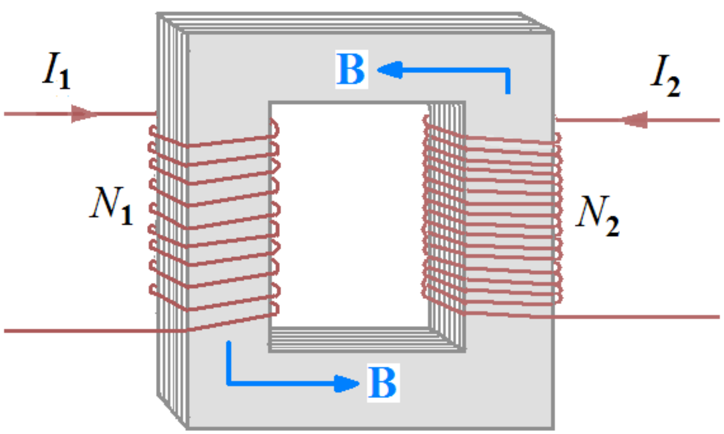


Karşılıklı indüktans

- Transformatör ve karşılıklı indüktans

Klasik karşılıklı indüktans örnekleri güç dönüşümü için ve benzinli motor ateşlemede yüksek voltaj meydana getirmek için transformatörlerdir.

Bir I_1 akımı N_1 sarımlı primer bobinden akar ve N_2 sarımlı 2.bobinle birleşen bu akım B akısını oluşturur.



Karşılıklı indüktans $M_{2\,1}$ bulunur böylece Φ_2 indüklenmesi aşağıdaki gibi verilir:

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

$M_{2\,1}$—bobinlerin karşılıklı indüktansı

Ayrıca
$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

Genelde , $M_{1\,2} = M_{2\,1}$

Karşılıklı indüktans

❑ Değişken akım ve indüklenen emk

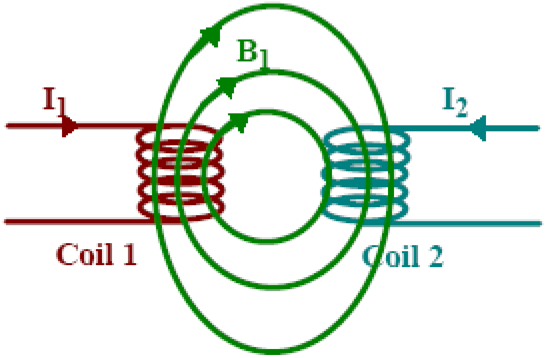
B_1 manyetik alanı üreten I_1 değişken akımlı birincil sargıya sahip belirli iki bobin düşünelim .B_1 den dolayı ikincil sargıda indüklenen emk ikincil sargı boyunca manyetik akıyla orantılıdır: $\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2 = N_2 \phi_2$

ϕ_2 2.sargıda tek bir ilmekten geçen akım ve N_2 2.sargıdaki ilmek sayısıdır. Bununla birlikte B_1 in I_1 ile orantılı olduğunu biliyoruz ki bunun anlamı Φ_2 I_1 ile orantılı olmasıdır. M karşılıklı indüktans Φ_2 ve I_1 arasında orantı sabiti olarak tanımlanır ve konum geometrisine bağlıdır.

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{N_2 \phi_2}{I_1}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d\Phi_2}{dI_1}\frac{dI_1}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt};$$

$$M = \frac{d\Phi_2}{dI_1}$$

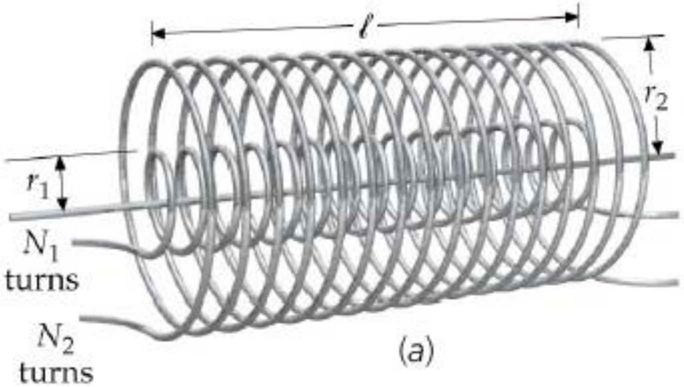


İndüklenen emk M ve akım değişim oranı ile orantılıdır.

Karşılıklı indüktans

- Örnek

Şimdi sıkıca sarılmış ortak merkezli solenoitler düşünelim.İç solenoitin I_1 akımı taşıdığını ve dış solenoit üzerindeki Φ_{B2} manyetik akısının bu akımdan dolayı meydana geldiğini farzedelim. O zaman iç solenoit tarafından üretilen akı:



$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \text{ where } n_1 = N_1 / \ell$$

Bu manyetik alandan dolayı dış solenoitten geçen akı :

$$\Phi_{B_2} = N_2 B_1 A_2 = N_2 B_1 (\pi r_1^2) = \mu_0 n_2 n_1 \ell (\pi r_1^2) I_1$$

$$M_{21} = \frac{\Phi_{B_2}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 \lambda (\pi r_1^2) ; \quad \text{genelde} \quad M_{21} = M_{12} = M .$$

Karşılıklı indüktans

- İndüktör örneği: Araba ateşleme bobini

, N_1=16,000 sarımlı, N_2=400 sarımlı iki ateşleme bobin birbiri üzerine sarılıdır. ●=10 cm, r=3 cm. Primer bobinden geçen I_1=3 A lik bir akım 10^{-4} saniyede kesilir.İndüklenen emk nedir?

$$\varepsilon_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}\,;\, M_{21} = \frac{\Phi_{B_2}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 \ell(\pi r_1^2)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = -3\times 10^4 \ A\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\varepsilon_2 = 6{,}000\,\mathrm{V}$$

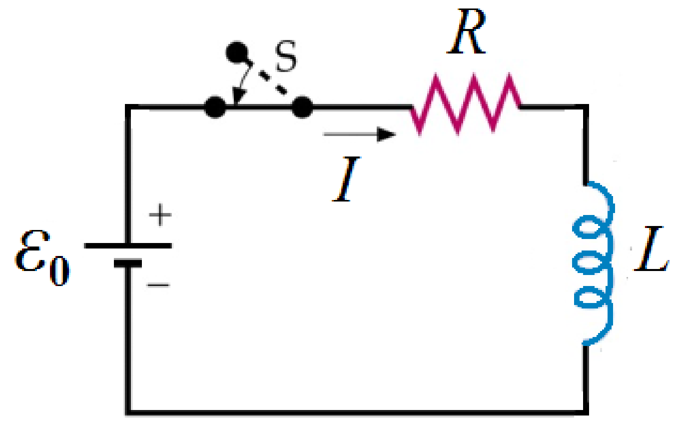
Ateşleme bir ateşleme tıpasında karşıdan karşıya aralık atlar ve bir benzin hava karışımını tutuşturur.

R-L devresi

- Bir R-L devresinde üretilen akım

Şekilde gösterilen devreyi düşünelim. t < 0 da anahtar açıktır ve I = 0.

R direnci indüktör bobinin direncini içerebilir



t = 0 da anahtar kapatılır ve I artmaya başlar, indüktörsüz olan devrede tüm akım nanosaniyede meydana gelecekti. İndüktörle böyle olmaz.

Kirchhoff ilmek kuralı :

$$\varepsilon_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

I İle çarpılır :

$$\varepsilon_0 I = I^2 R + LI\frac{dI}{dt}$$

Güç dengesi

R-L devresi

- Bir R-L devresinde üretilen akım

Batarya tarafından sağlanan güç $\rightarrow$

$$\varepsilon_0 I = I^2 R + LI\frac{dI}{dt}$$

$\leftarrow$ İndüktörde depolanan enerji oranıdır.

Dirençte ısı olarak yayılan güç

İndüktördeki enerji U_m ise:

$$\frac{dU_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$ Yada $$dU_m = L\,I\,dI$$

t = 0 (I = 0) dan t = ∞ ($I = I_f$) a integral alınırsa

$$U_{mf} = \int_0^{U_{mf}} dU_m = \int_0^{I_f} L\,I\,dI = \frac{1}{2}LI_f^2$$

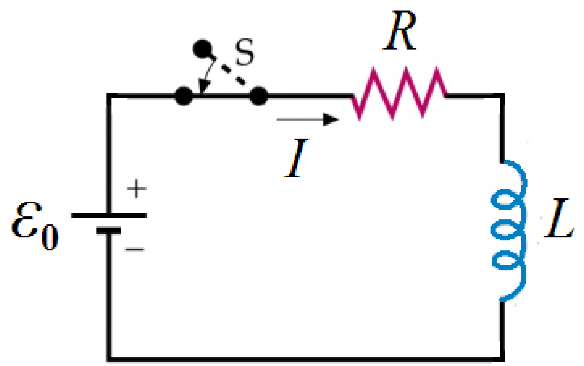
Böylece, I akımı taşıyan indüktörde depolanan enerji :

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2$$

R-L devresi

❑Bir R-L devresinde üretilen akım

Kirchoff ilmek kuralı:



$$\varepsilon_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

t = 0+, da I = 0

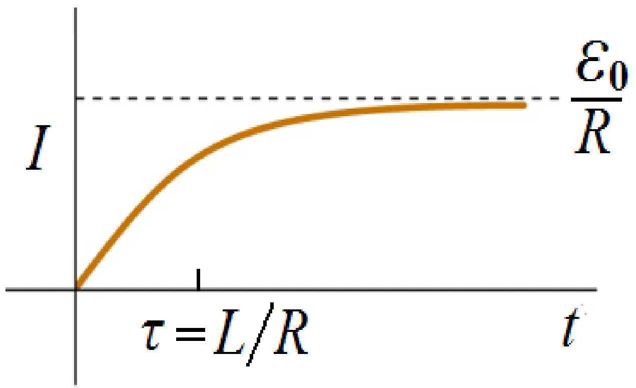
$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = \frac{\varepsilon_0}{L}$$

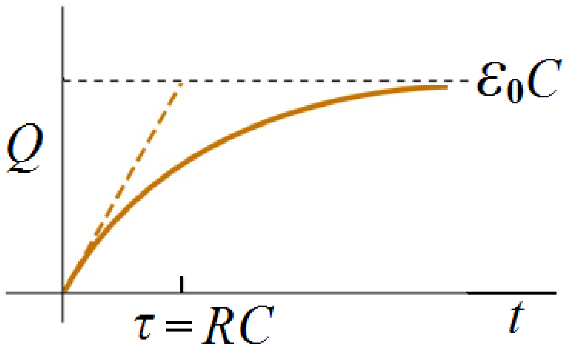
I sonuçta dI/dt = 0 oluncaya kadar artar

$$I_f = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

RC ile kıyaslanırsa:

Zamanın fonksiyonu olarak bir LR devresindeki akım

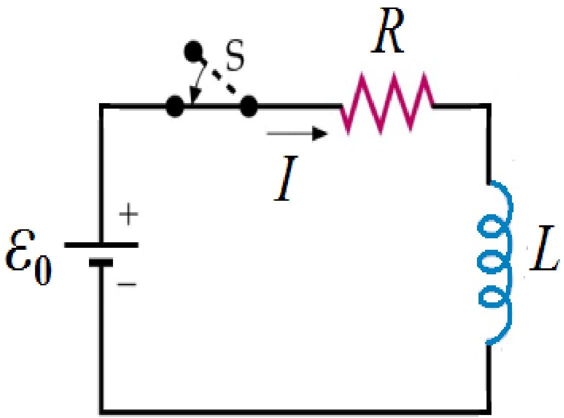




R-L devresi

- Bir R-Ldevresinde üretilen akım

$$\frac{L}{R}\frac{dI}{dt} + I = \frac{\varepsilon_0}{R}$$



$$\frac{dI}{\left(I - \frac{\varepsilon_0}{R}\right)} = -\frac{R}{L}dt$$

(I = 0, t = 0) ve (I = I, t = t) arasında integral alınır.

$$\ln\left(\frac{I - \varepsilon_0 / R}{-\varepsilon_0 / R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

R-L devresi

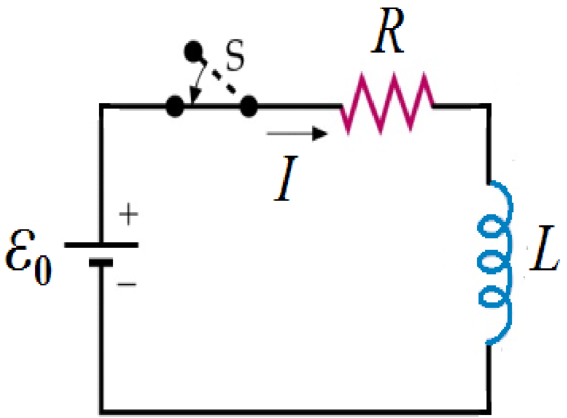
❑Bir R-L devresinde üretilen akım

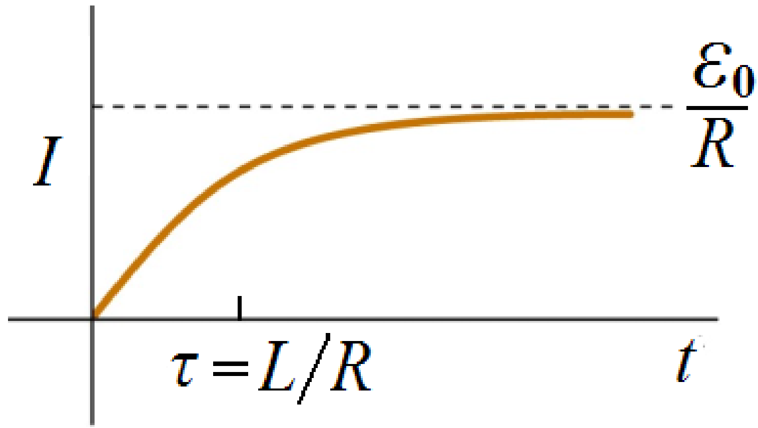
Şimdi her bir taraftaki gücü e ile ifade ederiz:

$$\left(\frac{I-\varepsilon_0/R}{-\varepsilon_0/R}\right)=e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I-\frac{\varepsilon_0}{R} = -\frac{\varepsilon_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

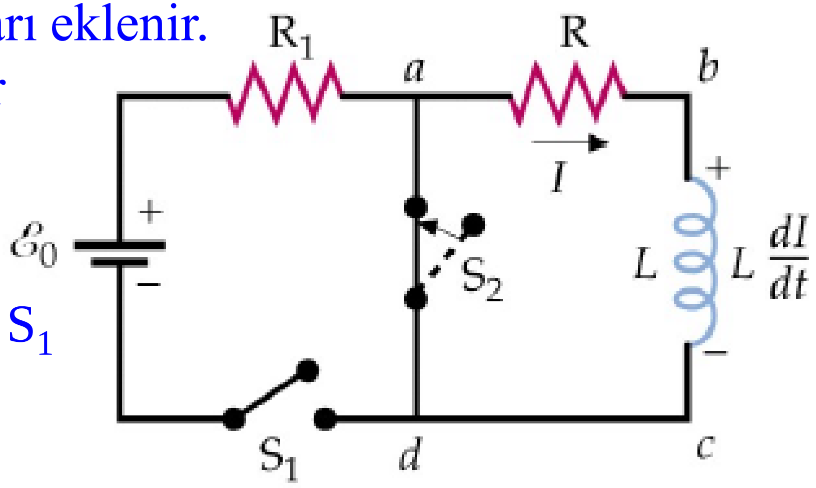




R-L devresi

- Boşalan bir R-L devresi

Bataryayı çıkarabilmek için S_2 anahtarı eklenir.
Ve R_1 bataryayı korumak için eklenir
böylece her iki anahtar kapalıyken
batarya korunur.

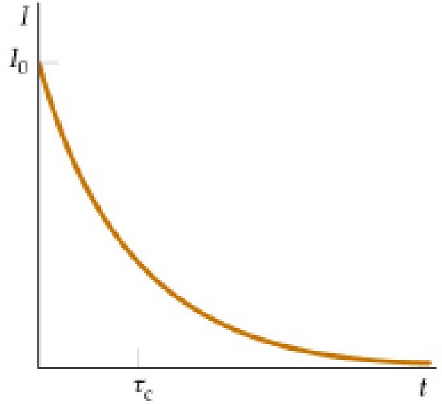


İlk olarak yeterince uzun zaman için S_1
kapalıdır böylece akım I_0
son değerinde sabitlenir.

t=0 da, kapalı S_2 ve açık S_1 bataryayı iptal etmek için oldukça etkilidir.
Şimdi abcd devresi I_0 akımı taşır.

Kirchhoff ilmek kuralı:

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = I_0 e^{-Rt/L}$$



R-L devresi

- Boşalan bir R-L devresi

Şimdi, akım I_0 dan 0 a azalırken, R direncinin ürettiği toplam ısıyı hesaplayalım.

Isı üretim oranı: $$P = \frac{dW}{dt} = I^2 R$$

Dirençte ısı olarak yayılan enerji: $$W = \int dW = \int_0^{\infty} I^2 R dt$$

Zamanın fonksiyonu olarak akım: $$I = I_0 e^{-Rt/L}$$

Toplam enerji: $$W = \int I_0^2 e^{-2Rt/L} R dt = \frac{1}{2} L I_0^2$$

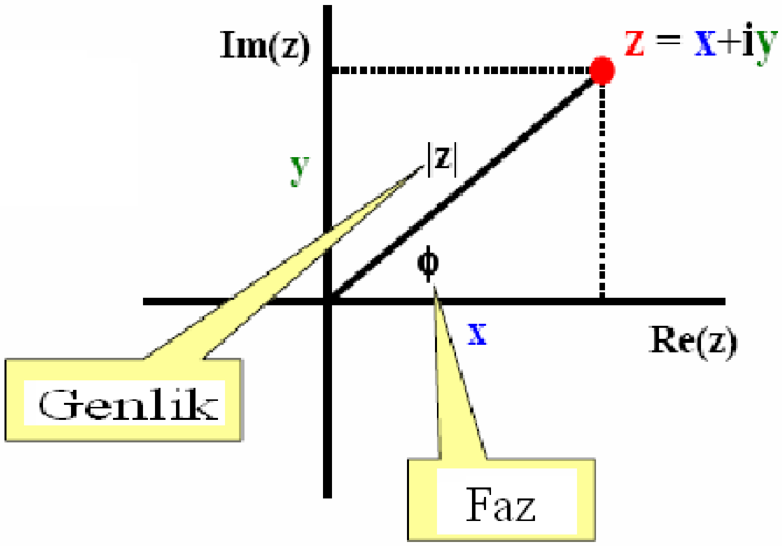
$\Rightarrow$

Üretilen toplam ısı gerçekte indüktörde depolanan enerjiye eşittir.

L-C devresi

- Kompleks sayılar ve düzlem

Kompleks sayılar : z = x + iy   Gerçek parça Re(z)=x, sanal parça Im(z)=y



$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = |z|e^{i\phi}$$

$$z^* = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z) = |z|e^{-i\phi}$$

$$x = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos\phi = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$y = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin\phi = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

$$\phi = \arctan(y/x)$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}$$

$$e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i\sin\phi \qquad \left|e^{\pm i\phi}\right| = 1 \qquad i^2 = -1 \quad \pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$$

L-C devresi

- Basit harmonik salınım

Basit harmonik hareket (SHM) için genel diferansiyel denklem:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + Cx(t) = 0 \;,$$

Burada C bir sabittir. Bu denklemi çözmenin bir yolu $x(t) = Ae^{at}$ şeklinde aranan bir çözümle cebirsel denkleme dönüştürmektir. Diferansiyel denklemde bu ifade yerini aldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$a^2 Ae^{at} + CAe^{at} = 0 \text{ yada } \boxed{a^2 = -C}.$$

L-C devresi

- Basit harmonik salınım

Durum 1(C>0, titresimli cözüm)

Pozitif C için $a = \pm i\sqrt{C} = \pm i\omega$ burada $\omega = \sqrt{C}$ dir.Bu durumda ikinci dereceden diferansiyel denklem için en genel çözüm aşağıda gösterilen dört yolla yazılabilir.

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Burada **A, B,** ve ϕ keyfi sabitlerdir.(**2.dereceden diferansiyel denklem için iki keyfi sabit**) $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ olduğunu hatırlayalım burada $i = \sqrt{-1}$ dir.

L-C devresi

- Basit harmonik salınım

Durum 2 (C < 0 Exponansiyel çözüm)

Negatif C için $a = \pm\sqrt{-C} = \pm\gamma$ burada , $\gamma = \sqrt{-C}$ dir.
Bu durumda **ikinci dereceden diferansiyel denklem** için en genel çözüm aşağıda gösterilen yolla yazılabilir:

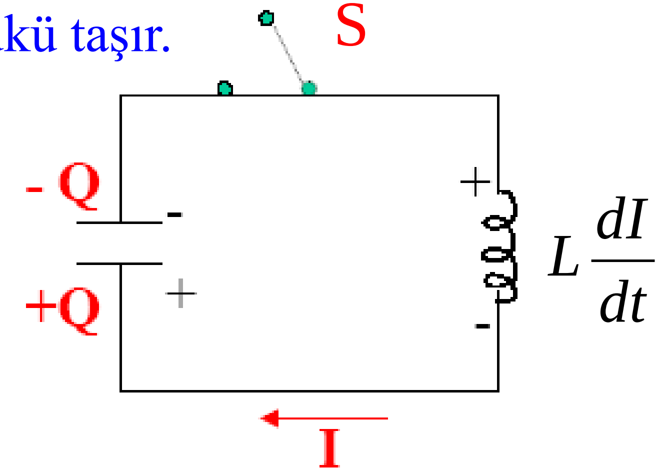
$$x(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t},$$

Burada **A** ve **B** keyfi sabitlerdir.

L-C Devresi

- Bir L-C devresi ve elektriksel salınım

Şekilde gösterildiği gibi bir indüktör ve bir kondansatörden oluşan bir devre düşünelim. Başlangıçta C kondansatörü Q_0 yükü taşır.



t=0 da anahtar kapanır yük öz indüklenme Emk sı üreten indüktör boyunca akar.

I akımı tanımından:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Kirchhoff ilmek kuralı:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Bir salınımda ki kütle için ivme eşitliği

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \qquad \text{c.f.} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

L-C devresi

- Bir L-C devresi ve elektriksel salınım

$$\frac{d^2Q}{d^2t} = -\frac{1}{LC}Q = -\omega Q \quad \text{c.f.} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

Bu eşitliğin çözümü basit harmonik harekettir.

$$Q = A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{c.f.} \quad x = A\cos(\omega t + \phi)$$

Şimdi A ve δ nın ne olduğunu ifade edielim*. Seçilen başlangıç şartları için : I(0)=0 ve Q(0)=Q_0 dır. Burada A=Q_0 ve ϕ=0 dır.

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega t)\,,\, I(t) = -\omega Q_0\sin(\omega t) = \omega Q_0\cos(\omega t + \pi/2)$$

Yük ve akım aynı ω açısal frekansı ile 90^o lik faz farkına sahiptir.Q=0 iken I maksimumdur.I=0 iken Q maksimumdur.

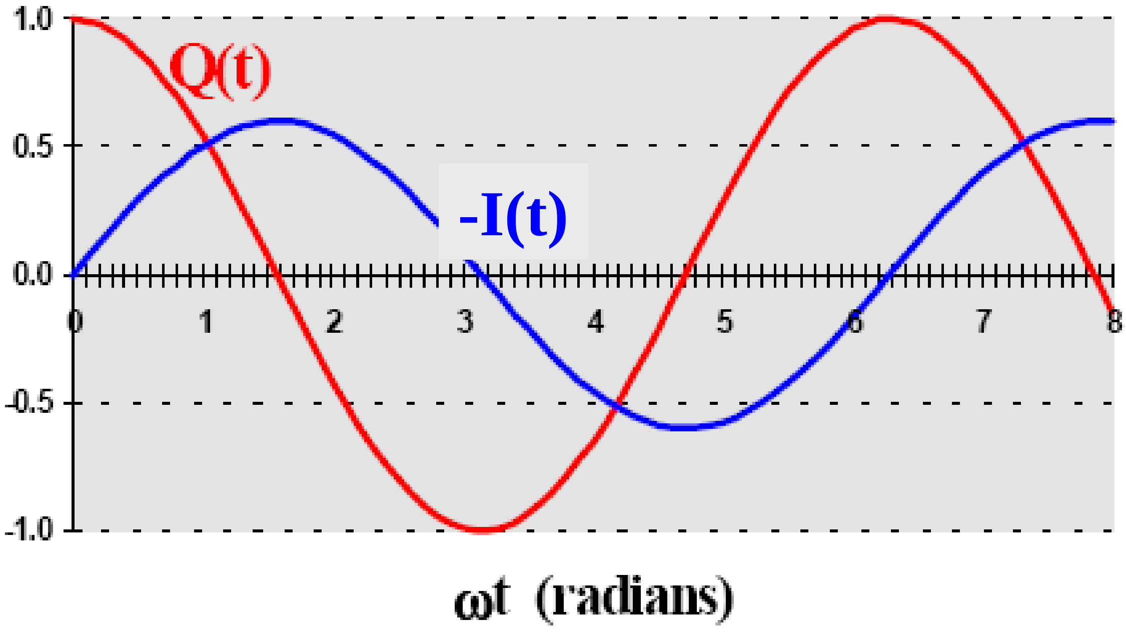
L-C devresi

- Bir L-C devresi ve elektriksel salınım

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)\ ,\ I(t) = -\omega Q_0 \sin(\omega t) = \omega Q_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

Yük ve akım aynı ω açısal frekansı ile 90° lik faz farkına sahiptir.Q=0 iken I maksimumdur.I=0 iken Q maksimumdur.

.



L-C devresi

- Bir L-C devresi ve elektriksel salınım

Kondansatördeki elektrik enerjisi:

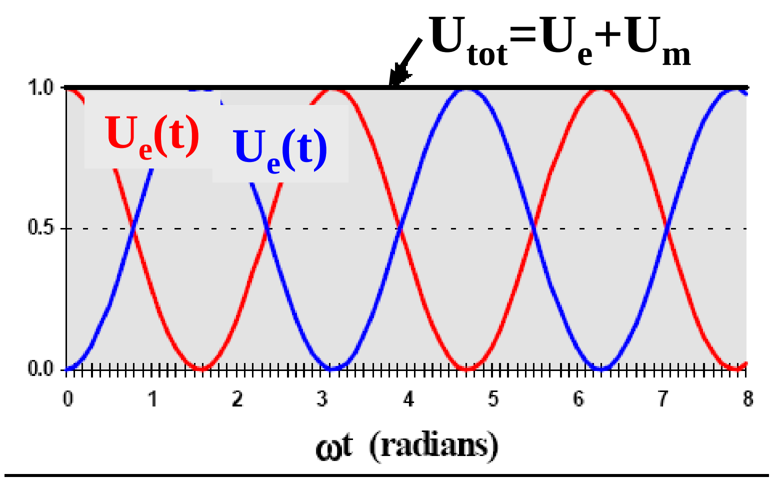
$$U_e = \frac{1}{2}QV_c = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2(\omega t)$$

→ Elektrik enerji 0 ve Q_0^2 maksimumu arasında titreşir.

İndüktördeki manyetik enerji:

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega^2 Q_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\sin^2(\omega t) \because \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

→ Manyetik enerji 0 ve Q_0^2 /(2C) maksimumu arasında titreşir



L-R-C devresi

- Diğer diferansiyel denklem

2.derece diferansiyel denklemi düşünelim:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + Cx(t) = 0\,,$$

Burada **C** ve **D** sabittir.Bu eşitliği $x(t) = Ae^{at}$ formunda çözümler arayan cebirsel denklemi kullanarak buluruz.

Bunu diferansiyel denklemde yerine koyalım;

$$a^2 + Da + C = 0 \quad \text{yada} \quad \boxed{a = -\frac{D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - C}}\,.$$

elde ederiz.

L-R-C devresi

- Diğer diferansiyel denklem

Durum I (C > (D/2)^2, sönümlü osilasyonlar):

C > (D/2)^2 İçin $a = -D/2 \pm i\sqrt{C-(D/2)^2} = -D/2 \pm i\omega'$, Burada

$\omega' = \sqrt{C-(D/2)^2}$, ve aşağıdaki formlarda en genel çözüm elde edilir.

$$x(t) = e^{-Dt/2}\left(Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}\right)$$

$$x(t) = e^{-Dt/2}\left(A\cos(\omega' t) + B\sin(\omega' t)\right)$$

$$x(t) = Ae^{-Dt/2}\sin(\omega' t + \phi)$$

$$x(t) = Ae^{-Dt/2}\cos(\omega' t + \phi)$$

Burada A, B ve ϕ keyfi sabitlerdir.

L-R-C devresi

- Diğer diferansiyel denklem

Durum II (C < (D/2)^2, bitmiş sönüm):

C < (D/2)^2 İçin , $a = -D/2 \pm \sqrt{(D/2)^2 - C} = -D/2 \pm \gamma$, Burada

$\gamma = \sqrt{(D/2)^2 - C}$. Bu durumda ,

$$x(t) = e^{-Dt/2}\left(A e^{\gamma t} + B e^{-\gamma t}\right).$$

Durum III (C = (D/2)^2, kritik sönüm):

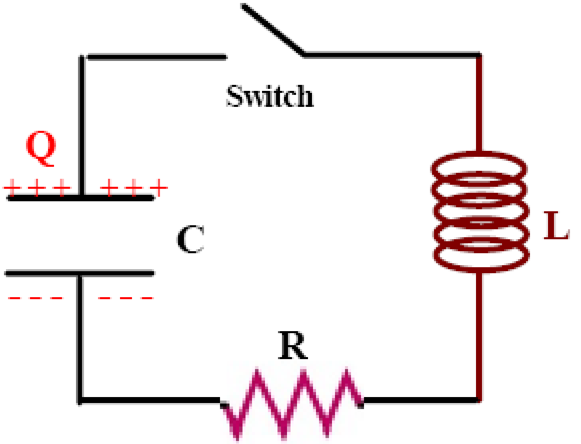
C = (D/2)^2 İçin , $a = -D/2$, ve

$$x(t) = A e^{-Dt/2}.$$

L-R-C devresi

- Bir L-R-C devresi ve elektriksel sönme salınımı

t=0 da anahtar kapalı ve Q_0 başlangıç yüklü bir kondansatör indüktöre seri bağlıdır.



Başlangıç şartları: $Q(0)=Q_0 \; ; I(0)=0$

Akım akışı yönünde devre boyunca bir ilmek aşağıdaki ifadeyi sağlar:

$$\frac{Q}{C}-L\frac{dI}{dt}-IR=0$$

Bunun için akım kondansatörden dışarı akar,

$$I=-\frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{LC}Q=0$$

L-R-C devresi

- Bir L-R-C devresi ve elektriksel sönme salınımı

$R^2 < 4LC$ ise. cözüm:

$$Q(t) = Q_0 e^{-Rt/(2L)} \cos \omega' t \quad \text{Burada} \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - [R/(2L)]^2} \quad \text{ve} \quad \omega = 1/\sqrt{LC}$$

R=0 ise,sönme meydana gelmeyeceğine dikkat edilmelidir.