İki-Yönlü ANOVA (Rasgele Blok Tasarımı)

İstatistiksel Deney Tasarımı

Birdal Şenoğlu
Şükrü Acıtaş

İçindekiler

- İki-yönlü ANOVA, bir-yönlü ANOVA ya benzer olarak, etkisi araştırılmak istenen faktör sayısı "bir" olduğunda kullanılır.
- Bir-yönlü ANOVA dan farklı olarak, deney birimleri arasında sistematik farklılıklar söz konusudur.
- Bu sistematik farklılıkların etkisi kendi içinde homojen, kendi aralarındaheterojen olan bloklar kullanılarak giderilmeye çalışılır.
- Bloklama, daha önce de belirtildiği gibi, deneysel hatanın azaltılması yoluyla deneyin hassaslığının artmasını sağlar.

- İki-yönlü ANOVA, **rasgele tam blok tasarımı** (randomized complete block design) olarak da bilinir.
- Buradaki "tam" kelimesi bloklardaki deney birimi sayısının deneme sayısına eşit olduğunu ifade eder.
- İki-yönlü ANOVA, blok tasarımları içerisinde en kolay olanı ve en yaygın olarak kullanılanıdır.
- İki-yönlü ANOVA kullanmanın bir başka sebebi de bazı deneylerde ekonomik, fiziksel veya çevresel nedenlerden dolayı yeteri kadar homojen deney birimi elde edilememesidir. Bu gibi durumlarda, iki-yönlü ANOVA kullanmak bir tercih değil bir zorunluluk halini alır.

İki-yönlü ANOVA da üç farklı durum söz konusudur:

1. Her gözede bir gözlemin olduğu ve denemelerle bloklar arasında etkileşimin olmadığı durum,
2. Her gözede birden fazla gözlemin olduğu ve denemelerle bloklar arasında etkileşimin olmadığı durum,
3. Her gözede birden fazla gözlemin ve denemelerle bloklar arasında etkileşimin olduğu durum.

Her gözede bir gözlemin olduğu ve etkileşimin olmadığı durum için matematiksel model

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b \tag{1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

y_{ij},	$j-$inci bloktaki, $i-$inci denemeye ait gözlem değerini,
μ,	genel ortalamayı,
τ_i,	i-inci denemenin etkisini,
γ_j,	$j-$inci bloğun etkisini ve
ε_{ij},	rasgele hata terimlerini

gösterir.

(1) modeli sabit etkili bir modeldir. Bir başka deyişle, (1) modelinde

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=1}^{b} \gamma_b = 0 \tag{2}$$

olduğu varsayılır.

(1) modeline ilişkin veri yapısı aşağıdaki gibidir;

	Bloklar					
Denemeler	1	2	$\cdots$	b	Toplam	Ortalama
1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1b}	$y_{1\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot}$
2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2b}	$y_{2\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$		$\vdots$
a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{ab}	$y_{a\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot}$
Toplam	$y_{\cdot 1}$	$y_{\cdot 2}$	$\cdots$	$y_{\cdot b}$	$y_{\cdot\cdot}$	
Ortalama	$\bar{y}_{\cdot 1}$	$\bar{y}_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\bar{y}_{\cdot b}$		$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

Burada,

$$\begin{aligned} y_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^{b} y_{ij} \quad , \quad \bar{y}_{i\cdot} = \frac{y_{i\cdot}}{b} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, a \\ y_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^{a} y_{ij} \quad , \quad \bar{y}_{\cdot j} = \frac{y_{\cdot j}}{a} \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, b \end{aligned} \tag{3}$$

dır.
Ayrıca, $N = ab$ toplam gözlem sayısını göstermek üzere

$$y_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij} \quad \text{ve} \quad \bar{y}_{\cdot\cdot} = \frac{y_{\cdot\cdot}}{N} \tag{4}$$

sırasıyla tüm gözlemlerin toplamı ve tüm gözlemlerin ortalaması olarak tanımlanır.

(1) modelinde parametrelerin LS tahmin edicileri,

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{..} \tag{5}$$
$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \tag{6}$$
$$\tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \tag{7}$$

olarak bulunur.

Hatanın varyansı σ^2 nin (yan düzeltmesi yapılmış) LS tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\tilde{\mu}-\tilde{\tau}_i-\tilde{\gamma}_j)^2}{N-a-b+1} && (8)\\
&= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{..}-\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{..}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2}{N-a-b+1} && (9)\\
&= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2}{N-a-b+1} && (10)
\end{aligned}$$

dir.

(1) modelinde temel amaç, denemeler arasında ve bloklar arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemektir. Bu iki durum için hipotezler sırasıyla,

$$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \tag{11}$$

ve

$$H_{02} : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_b = 0 \tag{12}$$

dır.

(1) modelinde, toplam değişkenlik

$$SS_{Toplam} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \tag{13}$$

olarak ifade edilir. (13) eşitliğinde, parantez içine $\bar{y}_{i.}$, $\bar{y}_{.j}$ ve $\bar{y}_{..}$ ifadeleri bir eklenip bir çıkartılır ve kare ifade açılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} SS_{Toplam} \quad = \quad & b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 \\ & + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \end{aligned} \tag{14}$$

elde edilir.

Eğer,

$$\begin{aligned} SS_{Deneme} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2 = b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \\ SS_{Blok} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2 = a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \\ SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \end{aligned} \tag{15}$$

denirse,

(13) eşitliği,

$$SS_{Toplam} = SS_{Deneme} + SS_{Blok} + SS_{Hata} \quad (16)$$

şeklinde deneme kareler toplamı, blok kareler toplamı ve hata kareler toplamı şeklinde bileşenlerine ayrılır.

Test İstatistikleri

(1) modelinde, (11) hipotezini sınamak için

$$F_{Deneme} = \frac{SS_{Deneme} \Big/ (a-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-a-b+1)} = \frac{MS_{Deneme}}{MS_{Hata}} \qquad (17)$$

ve (12) hipotezini sınamak için de

$$F_{Blok} = \frac{SS_{Blok} \Big/ (b-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-a-b+1)} = \frac{MS_{Blok}}{MS_{Hata}} \qquad (18)$$

test istatistikleri kullanılır.

Teorem

(1) *modelinde,* H_0 *hipotezi altında,*

(i) F_{Deneme} *test istatistiği,* $a-1$ *ve* $N-a-b+1$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

(ii) F_{Blok} *test istatistiği,* $b-1$ *ve* $N-a-b+1$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

KARAR

- F_{Deneme} test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde $a-1$ ve $N-a-b+1$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_{Deneme} > \boldsymbol{F}_{\alpha;a-1;N-a-b+1}$$

ise "*Denemeler arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir.

- F_{Blok} test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde $b-1$ ve $N-a-b+1$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_{Blok} > \boldsymbol{F}_{\alpha;n-1;N-a-b+1}$$

ise "*Bloklar arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir. ♣

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında, her gözede bir gözlemin olduğu ve etkileşimin olmadığı iki-yönlü ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

ANOVA Tablosu

Kaynak	df	SS	MS	F
Denemeler	$a-1$	SS_{Deneme}	MS_{Deneme}	F_{Deneme}
Bloklar	$b-1$	SS_{Blok}	MS_{Blok}	F_{Blok}
Hata	$N-a-b+1$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

Her gözede birden fazla gözlemin olduğu ve etkileşimin olmadığı durum için matematiksel model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \varepsilon_{ijk}, \tag{19}$$
$$i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b; \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

olup model parametreleri Bölüm 5.2 de verildiği gibi tanımlanır.

(19) modeline ilişkin veri yapısı aşağıdaki gibidir:

	Bloklar			
Denemeler	1	2	$\cdots$	b
1	$y_{111}, y_{112}, \cdots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \cdots, y_{12n}$	$\cdots$	$y_{1b1}, y_{1b2}, \cdots, y_{1bn}$
2	$y_{211}, y_{212}, \cdots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \cdots, y_{22n}$	$\cdots$	$y_{2b1}, y_{2b2}, \cdots, y_{2bn}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a	$y_{a11}, y_{a12}, \cdots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \cdots, y_{a2n}$	$\cdots$	$y_{ab1}, y_{ab2}, \cdots, y_{abn}$

Burada,

$$\begin{aligned} y_{i\cdot\cdot} &= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{i\cdot\cdot} = \frac{y_{i\cdot\cdot}}{bn} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, a \\ y_{\cdot j\cdot} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{\cdot j\cdot} = \frac{y_{\cdot j\cdot}}{an} \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, b \end{aligned} \tag{20}$$

dir.
Ayrıca, $N = abn$ toplam gözlem sayısını göstermek üzere,

$$y_{\ldots} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{\ldots} = \frac{y_{\ldots}}{N} \tag{21}$$

sırasıyla tüm gözlemlerin toplamı ve tüm gözlemlerin ortalaması olarak tanımlanır.

(19) modelindeki parametrelerin LS tahmin edicileri, (1) modelindeki parametrelerin LS tahmin edicilerine benzer olarak aşağıda gösterildiği gibi elde edilir;

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{...} \tag{22}$$

$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} \tag{23}$$

$$\tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} \ . \tag{24}$$

(19) modelinde, denemeler arasında ve bloklar arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı, bir başka deyişle, (11) ve (12) hipotezleri sırasıyla

Test İstatistikleri

$$F_{Deneme} = \frac{SS_{Deneme} \Big/ (a-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-a-b+1)} = \frac{MS_{Deneme}}{MS_{Hata}} \tag{25}$$

ve

$$F_{Blok} = \frac{SS_{Blok} \Big/ (b-1)}{SS_{Hata} \Big/ (N-a-b+1)} = \frac{MS_{Blok}}{MS_{Hata}} \tag{26}$$

test istatistikleri kullanılarak sınanır.

Burada,

$$\begin{aligned}
SS_{Deneme} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2 = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2 \\
SS_{Blok} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2 = an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2 \\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots})^2
\end{aligned} \tag{27}$$

dır. Karar kısmı, Bölüm 5.2 dekine benzer şekilde düzenlenir.

Her gözede birden fazla gözlemin olduğu ve etkileşimin olmadığı iki-yönlü ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

ANOVA Tablosu

Kaynak	df	SS	MS	F
Denemeler	$a-1$	SS_{Deneme}	MS_{Deneme}	F_{Deneme}
Bloklar	$b-1$	SS_{Blok}	MS_{Blok}	F_{Blok}
Hata	$N-a-b+1$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

Her gözede birden fazla gözlemin ve etkileşimin olduğu durum için matematiksel model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \tau\gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \qquad (28)$$
$$i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

şeklinde ifade edilir.

Burada, $\tau\gamma_{ij}$, $i-$inci deneme ile $j-$inci blok arasındaki etkileşim etkisini gösterir. Diğer parametrelerin yorumları Bölüm 5.2 de verildiği gibidir. (28) modeli, uygulamada en çok kullanılan modeldir.

Bu modele ilişkin veri yapısı, her gözede birden fazla gözlemin olduğu ve etkileşimin olmadığı modele ilişkin veri yapısı ile aynıdır.

(28) modeli, sabit etkili bir modeldir. Bir başka deyişle, (28) modelinde

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{b} \gamma_j = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{a} \tau\gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{b} \tau\gamma_{ij} = 0 \tag{29}$$

olduğu varsayılır.

(28) modelinde,

$$\begin{aligned}
y_{i\cdot\cdot} &= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{i\cdot\cdot} = \frac{y_{i\cdot\cdot}}{bn} \quad , \quad i = 1,2,\cdots,a \\
y_{\cdot j\cdot} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{\cdot j\cdot} = \frac{y_{\cdot j\cdot}}{an} \quad , \quad j = 1,2,\cdots,b \\
y_{ij\cdot} &= \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{ij\cdot} = \frac{y_{ij\cdot}}{n} \quad , \quad i = 1,2,\cdots,a; j = 1,2,\cdots,b
\end{aligned} \tag{30}$$

ve ayrıca, $N = abn$ toplam gözlem sayısını göstermek üzere

$$y_{\cdots} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{\cdots} = \frac{y_{\cdots}}{N} \tag{31}$$

olarak tanımlanır.

(28) modelinde parametrelerin LS tahmin edicileri

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu} &= \bar{y}_{...} && (32)\\
\tilde{\tau}_i &= \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} && (33)\\
\tilde{\gamma}_j &= \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} && (34)\\
\tilde{\tau\gamma}_{ij} &= \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} && (35)\\
& && (36)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Hatanın varyansı σ^2 nin (yan düzeltmesi yapılmış) LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \tilde{\mu} - \tilde{\tau}_i - \tilde{\gamma}_j - \tilde{\tau\gamma}_{ij})^2}{ab(n-1)} \quad (37)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2}{N - ab} \quad (38)$$

dir.

(28) modelinde denemeler arasında, bloklar arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı ve deneme×blok etkileşim etkisinin anlamlı olup olmadığı sınanır. Her bir durum için hipotezler sırasıyla

$$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \tag{39}$$

$$H_{02} : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_b = 0 \tag{40}$$

ve

$$H_{03} : \tau\gamma_{11} = \tau\gamma_{12} = \cdots = \tau\gamma_{ab} = 0 \tag{41}$$

dır.

(28) modelinde genel kareler toplamı

$$SS_{Toplam} = SS_{Deneme} + SS_{Blok} + SS_{Etkilesim} + SS_{Hata} \tag{42}$$

olarak bileşenlerine ayrılır.

Burada,

$$
\begin{aligned}
SS_{Deneme} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 \\
SS_{Blok} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 = an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 \\
SS_{Etkilesim} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2 \\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2
\end{aligned} \tag{43}
$$

dir.

Test İstatistikleri

(28) modelinde, (39) hipotezini sınamak için

$$F_{\textit{Deneme}} = \frac{SS_{\textit{Deneme}} \Big/ (a-1)}{SS_{\textit{Hata}} \Big/ (N-ab)} = \frac{MS_{\textit{Deneme}}}{MS_{\textit{Hata}}}, \tag{44}$$

(40) hipotezini sınamak için

$$F_{\textit{Blok}} = \frac{SS_{\textit{Blok}} \Big/ (b-1)}{SS_{\textit{Hata}} \Big/ (N-ab)} = \frac{MS_{\textit{Blok}}}{MS_{\textit{Hata}}} \tag{45}$$

ve (41) hipotezini sınamak için

$$F_{\textit{Etkilesim}} = \frac{SS_{\textit{Etkilesim}} \Big/ (a-1)(b-1)}{SS_{\textit{Hata}} \Big/ (N-ab)} = \frac{MS_{\textit{Etkilesim}}}{MS_{\textit{Hata}}} \tag{46}$$

test istatistikleri kullanılır.

Teorem

(28) *modelinde,* H_0 *hipotezi altında,*

(i) F_{Deneme} *test istatistiği,* $a-1$ *ve* $N-ab$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

(ii) F_{Blok} *test istatistiği,* $b-1$ *ve* $N-ab$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

(iii) $F_{Etkilesim}$ *test istatistiği,* $(a-1)(b-1)$ *ve* $N-ab$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

KARAR

- F_{Deneme} test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $a-1$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_{Deneme} > \boldsymbol{F}_{\alpha;a-1;N-ab}$$

ise "*Denemeler arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir.

- F_{Blok} test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $b-1$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_{Blok} > \boldsymbol{F}_{\alpha;b-1;N-ab}$$

ise "*Bloklar arasında anlamlı bir farklılık vardır*" denir.

- $F_{Etkilesim}$ test istatistiğinin değeri, α anlam düzeyinde, $(a-1)(b-1)$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$F_{Etkilesim} > \boldsymbol{F}_{\alpha;(a-1)(b-1);N-ab}$$

ise "*Deneme$\times$Blok etkileşimi istatistiksel olarak anlamlıdır*" denir. ♣

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında, her gözede birden fazla gözlemin ve etkileşimin olduğu iki-yönlü ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

ANOVA Tablosu

Kaynak	df	SS	MS	F
Denemeler	$a-1$	SS_{Deneme}	MS_{Deneme}	F_{Deneme}
Bloklar	$b-1$	SS_{Blok}	MS_{Blok}	F_{Blok}
Etkileşim	$(a-1)(b-1)$	$SS_{Etkilesim}$	$MS_{Etkilesim}$	$F_{Etkilesim}$
Hata	$N-ab$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

(28) modelinde, beklenen deneme kareler ortalaması

$$E(MS_{Deneme}) = \sigma^2 + \frac{bn}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2 \tag{47}$$

dir.

- (47) *eşitliğinden görülmektedir ki,* MS_{Deneme}*, sıfır hipotezinin doğru olması durumunda,* σ^2 *nin yansız bir tahmin edicisidir.*

(28) modelinde, beklenen blok kareler ortalaması,

$$E(MS_{Blok}) = \sigma^2 + \frac{an}{b-1}\sum_{i=1}^{a}\gamma_j^2 \tag{48}$$

dir.

- (48) *eşitliğinden görülmektedir ki,* MS_{Blok}*, sıfır hipotezinin doğru olması durumunda,* σ^2 *nin yansız bir tahmin edicisidir.*

(28) modelinde, beklenen etkileşim kareler ortalaması,

$$E(MS_{Etkilesim}) = \sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \tau\gamma_{ij}^2 \qquad (49)$$

dir.

- (49) *eşitliğinden de görülmektedir ki,* $MS_{Etkilesim}$*, sıfır hipotezinin doğru olması durumunda,* σ^2 *nin yansız bir tahmin edicisidir.*

(28) modelinde, beklenen hata kareler ortalaması,

$$E(MS_{Hata}) = E\left(\frac{SS_{Hata}}{N - ab}\right) = \sigma^2 \tag{50}$$

dir.

- (50) *eşitliğinden görülmektedir ki,* MS_{Hata}, σ^2 *nin her zaman yansız bir tahmin edicisidir.*

(1) modelinde, bazı gözlemler çeşitli nedenlerden dolayı bilinemeyebilir ya da kaybolabilir. Böyle bir durumda, deneme etkilerinin ve blok etkilerinin toplamları sıfıra eşit olamaz, bir başka deyişle,

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i \neq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=1}^{b} \gamma_j \neq 0$$

dır. Bunun bir sonucu olarak genel kareler toplamı, deneme kareler toplamı, blok kareler toplamı ve hata kareler toplamı olarak bileşenlerine ayrılamaz (Hicks & Turner, 1999).

(1) modelinde, $i-$inci deneme, $j-$inci bloktaki y_{ij} gözleminin kayıp olduğunu varsayalım. Bu kayıp gözlem m ile gösterilsin. Bu durumda veri yapısı, aşağıda gösterilen tablodaki gibi olur.

	Bloklar						
Denemeler	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	b	Toplam
1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	y_{1b}	$y_{1\cdot}$
2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	y_{2b}	$y_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
i	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	m	$\cdots$	$\cdots$	$y_{i\cdot}^* + m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	y_{ab}	$y_{a\cdot}$
Toplam	$y_{\cdot 1}$	$y_{\cdot 2}$	$\cdots$	$y_{\cdot j}^* + m$	$\cdots$	$y_{\cdot b}$	$y_{\cdot\cdot}^* + m$

m nin LS tahmin edicisi,

$$\tilde{m} = \frac{ay_{i.}^{*} + by_{.j}^{*} - y_{..}^{*}}{N - a - b + 1} \tag{51}$$

dir. Burada,

$y_{i.}^{*}$, $i-$inci denemede m dışındaki diğer terimlerin toplamını,
$y_{.j}^{*}$, $j-$inci blokta m dışındaki diğer terimlerin toplamını,
y_{ij}^{*}, m dışındaki diğer gözlemleri ve
$y_{..}^{*}$, m dışındaki diğer gözlemlerin toplamını

gösterir.

Bilinmeyen y_{ij} gözleminin yerine $\tilde{m}$ tahmin edicisi yazılarak, (15) de verilen kareler toplamları hesaplanır.
Daha sonra kareler ortalamaları da bulunarak ANOVA tablosu aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur:

ANOVA Tablosu

Kaynak	df	SS	MS	F
Denemeler	$a-1$	SS_{Deneme}	MS_{Deneme}	F_{Deneme}
Bloklar	$b-1$	SS_{Blok}	MS_{Blok}	F_{Blok}
Hata	$(N-a-b+1)-1$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-2$	SS_{Toplam}		

Burada dikkat edilmesi gereken bir önemli husus da hatanın serbestlik derecesinin $N - a - b - 1$ olduğudur; buradaki (-1) kayıp gözlem sayısını ifade etmektedir. Benzer şekilde kayıp gözlem sayısı birden fazla ise hatanın serbestlik derecesi, kayıp gözlem sayısı kadar azaltılır.