Latin Karesi ve Greko-Latin Karesi Tasarımları

İstatistiksel Deney Tasarımı

Birdal Şenoğlu
Şükrü Acıtaş

İçindekiler

Giriş

- Fisher (1925, 1926) tarafından önerilen **Latin karesi tasarımının** (Latin square design-LSD) kullanımı, iki-yönlü ANOVA da olduğu gibi bloklama ilkesine dayanır.
- Ancak, iki-yönlü ANOVA dan farklı olarak **satır** (row) ve **sütun** (column) adı verilen iki tane bloklama değişkeni vardır.
- Deney birimleri arasındaki heterojenlik bir tane bloklama değişkeni kullanılarak giderilemeyecek kadar fazla ise, iki farklı bloklama değişkeni kullanılarak homojenlik sağlanmaya çalışılır.
- Böylelikle, deneysel hata azaltılmış olur.

Giriş

- Latin karesi tasarımında, birincil derecede öneme sahip olan faktör sayısı, bir-yönlü ve iki-yönlü ANOVA da olduğu gibi "bir" dir.
- Latin karesi, satır sayısının (r), sütün sayısının (c) ve deneme sayısının (a) birbirine eşit olduğu bir tasarımdır.
- Satır ve sütunların düzeylerinin kesiştiği her hücrede bir tane deney birimi vardır.
- Her deneme (Latin harfleri) , her satır ve her sütunda yalnız bir kez gözlenir.
- $r = c = a$ olduğu için toplam gözlem sayısı r^2 dir.
- Latin karesinin boyutlarını ifade etmek amacıyla, $r \times r$ Latin karesi ifadesi de kullanılmaktadır.
- Latin karesi tasarımı; satır-sütun tasarımları içerisinde en kolay, aynı zamanda da en popüler olanıdır.
- Bununla beraber, bahsedilen kısıtlardan dolayı, uygulamada yaygın olarak kullanıldığı söylenemez.

Giriş

Üç farklı denemenin (D1, D2, D3) etkisinin araştırıldığı bir 3×3 Latin karesi tasarımında, her denemenin her satır ve her sütunda yalnız bir kez bulunması koşulunu sağlayan birden fazla Latin karesi vardır. Olası iki farklı Latin karesi aşağıda verilmiştir.

	Sütunlar		
	A	B	C
Satırlar	B	C	A
	C	A	B

	Sütunlar		
	A	C	B
Satırlar	B	A	C
	C	B	A

Soldaki Latin karesinde, dikkat edilirse, birinci satır ve birinci sütundaki Latin harfleri alfabetik sıraya göre dizilmiştir. Bu Latin karesi, **indirgenmiş Latin karesi** (reduced Latin square) olarak adlandırılır.

Giriş

- İndirgenmiş Latin karesi, Latin Karesi tasarımında rasgeleleştirme yapılırken kullanılan önemli bir kavramdır.
- Dikkat edilmelidir ki, Latin karesinin boyutuna bağlı olarak indirgenmiş Latin karesi sayısı da birden fazla olabilir.
- Örneğin, $r = 2$ veya $r = 3$ iken indirgenmiş Latin karesi sayısı "bir", $r = 4$ iken ise "dört" tür.

Giriş

- $r \times r$ Latin karesi tasarımında rasgeleleştirme işlemi yapılırken, indirgenmiş Latin kareleri elde edildikten sonra içlerinden bir tanesi rasgele olarak seçilir.
- $3{\times}3$, $4{\times}4$ ve $5{\times}5$ Latin Kareleri için, indirgenmiş Latin karesinin bütün sütunlarının ve birinci satır dışındaki bütün satırlarının veya bütün satırlarının ve birinci sütun dışındaki bütün sütunlarının yerleri/sıraları rasgele olarak değiştirilir ve denemeler rasgele olarak Latin harflerine atanır/uygulanır.

Giriş

- 6×6 Latin karesi için, bütün satır ve sütunların yerleri/sıraları rasgele olarak değiştirilir ve denemeler Latin harflerine rasgele olarak atanır/uygulanır.
- Daha büyük kareler için, herhangi bir Latin karesinin satırlarının, sütunlarının ve denemelerinin yerleri/sıraları rasgele olarak değiştirilir, bkz Yates (1933), Fisher & Yates (1957), Lee (1975) ve Hinkelmann & Kempthorne (1994).

Matematiksel Model

Latin karesi tasarımı için matematiksel model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_k + \varepsilon_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, r \tag{1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

y_{ijk},	$j-$*inci* satır, $k-$ıncı sütundaki $i-$inci denemeye ait gözlem değerini,
μ,	genel ortalamayı,
τ_i,	$i-$inci denemenin etkisini,
γ_j,	$j-$inci satırın etkisini,
δ_k,	$k-$ıncı, sütunun etkisini ve
ε_{ijk},	rasgele hata terimlerini

gösterir.

Matematiksel Model

(1) modeli sabit etkili bir modeldir. Bir başka deyişle, (1) modelinde

$$\sum_{i=1}^{r} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \gamma_j = 0, \quad \sum_{k=1}^{r} \delta_k = 0 \tag{2}$$

olduğu varsayılır.

Parametre Tahmini

(1) modelinde parametrelerin LS tahmin edicileri,

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{\cdots} \quad (3)$$

$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots} \quad (4)$$

$$\tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{\cdot j \cdot} - \bar{y}_{\cdots} \quad (5)$$

$$\tilde{\delta}_k = \bar{y}_{\cdot\cdot k} - \bar{y}_{\cdots} \quad (6)$$

dir.

Parametre Tahmini

Burada,

$$\bar{y}_{i\cdot\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}}{r}, \quad \bar{y}_{\cdot j\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}}{r}, \quad \bar{y}_{\cdot\cdot k} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} y_{ijk}}{r}; \quad i,j,k = 1,2,\cdots,r \tag{7}$$

dir.
Ayrıca, $N = r^2$ toplam gözlem sayısını göstermek üzere

$$\bar{y}_{\cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}}{N} \tag{8}$$

tüm gözlemlerin ortalamasıdır.

Parametre Tahmini

Hatanın varyansı σ^2 nin (yan düzeltmesi yapılmış) LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \tilde{\mu} - \tilde{\tau}_i - \tilde{\gamma}_j - \tilde{\delta}_k)^2}{(r-1)(r-2)} \tag{9}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}_{...})^2}{(r-1)(r-2)} \tag{10}$$

dir.

Hipotez Testi

(1) modelinde, deneme, satır ve sütun etkilerinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı sınanır. Her bir durum için hipotezler, sırasıyla

$$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_r = 0 \tag{11}$$

$$H_{02} : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_r = 0 \tag{12}$$

ve

$$H_{03} : \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_r = 0 \tag{13}$$

dir.

Hipotez Testi: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

(1) modelinde, genel kareler toplamı

$$SS_{Toplam} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 \quad (14)$$

olarak ifade edilir ve

$$SS_{Toplam} = SS_{Deneme} + SS_{Satir} + SS_{Sutun} + SS_{Hata} \quad (15)$$

şeklinde bileşenlerine ayrılır. Burada,

Hipotez Testi: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

$$
\begin{aligned}
SS_{Deneme} &= r\sum_{i=1}^{r}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 \\
SS_{Satir} &= r\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 \\
SS_{Sutun} &= r\sum_{k=1}^{r}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2 \\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})^2
\end{aligned} \tag{16}
$$

dir.

Hipotez Testi: Test İstatistikleri

(1) modelinde, (11) hipotezini sınamak için

$$F_{Deneme} = \frac{SS_{Deneme} \Big/ (r-1)}{SS_{Hata} \Big/ (r-1)(r-2)} = \frac{MS_{Deneme}}{MS_{Hata}} \tag{17}$$

(12) hipotezini sınamak için

$$F_{Satir} = \frac{SS_{Satir} \Big/ (r-1)}{SS_{Hata} \Big/ (r-1)(r-2)} = \frac{MS_{Satir}}{MS_{Hata}} \tag{18}$$

ve (13) hipotezini sınamak için

$$F_{Sutun} = \frac{SS_{Sutun} \Big/ (r-1)}{SS_{Hata} \Big/ (r-1)(r-2)} = \frac{MS_{Sutun}}{MS_{Hata}} \tag{19}$$

test istatistikleri kullanılır.

Hipotez Testi: Test İstatistikleri

Teorem

(1) *modelinde,* H_0 *hipotezi altında,* F_{Deneme}, F_{Satir} *ve* F_{Sutun} *test istatistiklerinin her biri* $r-1$ *ve* $(r-1)(r-2)$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

Hipotez Testi: KARAR

- F_{Deneme}, F_{Satir} ve F_{Sutun} test istatistiklerinin değeri, α anlam düzeyinde, $r-1$ ve $(r-1)(r-2)$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse, sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$\begin{aligned} F_{Deneme} &> \boldsymbol{F}_{\alpha;r-1;(r-1)(r-2)} \\ F_{Satir} &> \boldsymbol{F}_{\alpha;r-1;(r-1)(r-2)} \\ F_{Sutun} &> \boldsymbol{F}_{\alpha;r-1;(r-1)(r-2)} \end{aligned}$$

ise sırasıyla

"*Denemeler arasında anlamlı bir farklılık vardır*"

"*Satırlar arasında anlamlı bir farklılık vardır*"

ve

"*Sütunlar arasında anlamlı bir farklılık vardır*"

denir. ♣

ANOVA Tablosu

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında, Latin karesi tasarımı için ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS	MS	F
Denemeler	$r-1$	SS_{Deneme}	MS_{Deneme}	F_{Deneme}
Satırlar	$r-1$	SS_{Satir}	MS_{Satir}	F_{Satir}
Sütunlar	$r-1$	SS_{Sutun}	MS_{Sutun}	F_{Sutun}
Hata	$(r-1)(r-2)$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

Giriş

- **Greko-Latin karesi** (Graeco-Latin square) tasarımında satır, sütun ve **Yunan** (Greek) harfleri olarak adlandırılan "üç" farklı bloklama değişkeni ile birincil derecede öneme sahip "bir" tane faktör vardır.
- Greko-Latin karesi tasarımında, bloklama değişkenleri ile faktöre ait düzey sayısının birbirine eşit olduğu kısıtı vardır.
- Bir başka kısıt ise faktör düzeylerini gösteren Latin harflerinin (A, B, C, D,. . .) her satır, her sütun ve her Yunan harfinde yalnız bir kez denenmesidir.
- Bu kısıtlardan dolayı, gerçek hayat problemlerinde oldukça nadiren kullanılan bir tasarım şeklidir.
- İsmini, tasarımda kullanılan Yunan ve Latin harflerinden alır. Bu bölümde, bloklama değişkenleri ile faktöre ait düzey sayısının (Latin karesi tasarımında olduğu gibi) "r" olduğu varsayılacaktır.

Giriş

A, B, C, D denemelerinin etkilerini karşılaştırmak istediğimiz bir deneyde, deney birimleri arasındaki heterojenliği kontrol altına almak için her biri dört düzeye sahip üç farklı bloklama değişkeninin olduğunu varsayalım. Bu deneme için kullanılabilecek olası 4×4 Greko-Latin kare tasarımı aşağıdaki gibidir.

A,α	B,γ	C,δ	D,β
C,γ	D,α	A,β	B,δ
D,δ	C,β	B,α	A,γ
B,β	A,δ	D,γ	C,α

Giriş

- Burada dikkat edilmesi gereken husus, Latin harflerinin ve Yunan harflerinin ayrı ayrı Latin kare olma özelliğini sağlamasıdır.
- Latin harflerinden ve Yunan harflerinden oluşan iki ayrı Latin karesi aşağıdaki gibidir.

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

α	γ	δ	β
γ	α	β	δ
δ	β	α	γ
β	δ	γ	α

Giriş

- Dikkat edilirse, iki Latin karesi birleştirildiğinde düzeylerin hiçbir kombinasyonu birlikte birden fazla bulunamaz, bkz. Lee (1975).
- Bu özelliği sağlayan Latin kareleri **dik** (orthogonal) olarak adlandırılır.
- Bu nedenle, Greko-Latin karesi, dik Latin karelerinin birleşimi olarak da tanımlanabilir.
- Eğer deneyde heterojenliği kontrol altına almak için bir tane daha bloklama değişkeni kullanmak gerekiyorsa, birbirine dik üç ayrı Latin karesi oluşturulur.
- Daha sonra bu Latin kareleri birleştirilerek oluşturulan tasarım kullanılır.
- İstenilen her boyutta Greko-Latin karesi oluşturmak her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin, $r = 2$ ve 6 için Greko-Latin karesi oluşturulamaz, bkz. Kempthorne (1952).

Matematiksel Model

Greko-Latin karesi tasarımı için matematiksel model

$$y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_k + \lambda_\ell + \varepsilon_{ijk\ell}, \quad i,j,k,\ell = 1,2,\cdots,r \tag{20}$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$y_{ijk\ell}$,	$j-$inci satır, $k-$ıncı sütun, $\ell-$inci Yunan harfindeki, $i-$inci denemeye ait gözlem değerini,
μ,	genel ortalamayı,
τ_i,	$i-$inci denemenin etkisini,
γ_j,	$j-$inci satırın etkisini,
δ_k,	$k-$ıncı sütunun etkisini,
λ_ℓ,	$\ell-$inci Yunan harfinin etkisini ve
$\varepsilon_{ijk\ell}$,	rasgele hata terimlerini

gösterir.

Matematiksel Model

(20) modeli sabit etkili bir modeldir. Bir başka deyişle (20) modelinde

$$\sum_{i=1}^{r} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \gamma_j = 0, \quad \sum_{k=1}^{r} \delta_k = 0, \quad \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell = 0 \qquad (21)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Parametre Tahmini

(20) modelinde parametrelerin LS tahmin edicileri

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{....} \quad (22)$$

$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....} \quad (23)$$

$$\tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....} \quad (24)$$

$$\tilde{\delta}_k = \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....} \quad (25)$$

$$\tilde{\lambda}_\ell = \bar{y}_{...\ell} - \bar{y}_{....} \quad (26)$$

dir.

Parametre Tahmini

Burada,

$$\bar{y}_{i\cdot\cdot\cdot}\frac{\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}y_{ijk\ell}}{r} \quad , \quad \bar{y}_{\cdot j\cdot\cdot}=\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}y_{ijk\ell}}{r}$$
$$\bar{y}_{\cdot\cdot k\cdot}\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}y_{ijk\ell}}{r} \quad , \quad \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot\ell}=\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}y_{ijk\ell}}{r} \tag{27}$$

dır.
Ayrıca, $N=r^2$ toplam gözlem sayısını göstermek üzere

$$\bar{y}_{\cdot\cdot\cdot\cdot}=\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}y_{ijk\ell}}{N} \tag{28}$$

tüm gözlemlerin ortalamasıdır.

Parametre Tahmini

Hatanın varyansı σ^2 nin (yan düzeltmesi yapılmış) LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}(y_{ijk\ell} - \tilde{\mu} - \tilde{\tau}_i - \tilde{\gamma}_j - \tilde{\delta}_k - \tilde{\lambda}_\ell)^2}{(r-1)(r-3)} \tag{29}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}(y_{ijk\ell} - \bar{y}_{i\dots} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{\dots\ell} + 3\bar{y}_{\dots.})^2}{(r-1)(r-3)} \tag{30}$$

dir.

Hipotez Testi

(20) modelinde, deneme, satır, sütun ve Yunan harflerinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı sınanır. Her bir durum için hipotezler sırasıyla,

$$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_r = 0 \tag{31}$$

$$H_{02} : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_r = 0 \tag{32}$$

$$H_{03} : \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_r = 0 \tag{33}$$

ve

$$H_{04} : \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0 \tag{34}$$

dir.

Hipotez Testi: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

(20) modelinde, genel kareler toplamı

$$S = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}(y_{ijk\ell} - \bar{y}_{....})^2 \tag{35}$$

olarak ifade edilir ve

$$SS_{Toplam} = SS_{Deneme} + SS_{Satir} + SS_{Sutun} + SS_{Yunan} + SS_{Hata} \tag{36}$$

şeklinde bileşenlerine ayrılır.

Hipotez Testi: Genel Kareler Toplamının Parçalanışı

Burada,

$$
\begin{aligned}
SS_{Deneme} &= r\sum_{i=1}^{r}(\bar{y}_{i\ldots}-\bar{y}_{\ldots\ldots})^2 \\
SS_{Satir} &= r\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{\ldots\ldots})^2 \\
SS_{Sutun} &= r\sum_{k=1}^{r}(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{\ldots\ldots})^2 \\
SS_{Yunan} &= r\sum_{\ell=1}^{r}(\bar{y}_{\ldots\ell}-\bar{y}_{\ldots\ldots})^2 \\
SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r}(y_{ijk\ell}-\bar{y}_{i\ldots}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{\ldots\ell}+3\bar{y}_{\ldots\ldots})^2
\end{aligned}
\tag{37}
$$

dir.

Hipotez Testi: Test İstatistikleri

(20) modelinde, (31) hipotezini sınamak için

$$F_{Deneme} = \frac{SS_{Deneme} \Big/ (r-1)}{SS_{Hata} \Big/ (r-1)(r-3)} = \frac{MS_{Deneme}}{MS_{Hata}} \tag{38}$$

(32) hipotezini sınamak için

$$F_{Satir} = \frac{SS_{Satir} \Big/ (r-1)}{SS_{Hata} \Big/ (r-1)(r-3)} = \frac{MS_{Satir}}{MS_{Hata}} \tag{39}$$

(33) hipotezini sınamak için

$$F_{Sutun} = \frac{SS_{Sutun} \Big/ (r-1)}{SS_{Hata} \Big/ (r-1)(r-3)} = \frac{MS_{Sutun}}{MS_{Hata}} \tag{40}$$

ve (34) hipotezini sınamak için

$$F_{Yunan} = \frac{SS_{Yunan} \Big/ (r-1)}{SS_{Hata} \Big/ (r-1)(r-3)} = \frac{MS_{Yunan}}{MS_{Hata}} \tag{41}$$

test istatistikleri kullanılır.

Hipotez Testi: Test İstatistikleri

Teorem

(20) *modelinde,* H_0 *hipotezi altında,* F_{Deneme}, F_{Satir}, F_{Sutun} *ve* F_{Yunan} *test istatistiklerinin her biri,* $r-1$ *ve* $(r-1)(r-3)$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

Hipotez Testi: KARAR

- F_{Deneme}, F_{Satir}, F_{Sutun} ve F_{Yunan} test istatistiklerinin değeri, α anlam düzeyinde, $r-1$ ve $(r-1)(r-3)$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ tablo değerinden daha büyükse sıfır hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle,

$$\begin{aligned} F_{Deneme} &> \boldsymbol{F}_{\alpha;r-1;(r-1)(r-3)} \\ F_{Satir} &> \boldsymbol{F}_{\alpha;r-1;(r-1)(r-3)} \\ F_{Sutun} &> \boldsymbol{F}_{\alpha;r-1;(r-1)(r-3)} \\ F_{Yunan} &> \boldsymbol{F}_{\alpha;r-1;(r-1)(r-3)} \end{aligned}$$

ise sırasıyla

"*Denemeler arasında anlamlı bir farklılık vardır*"

"*Satırlar arasında anlamlı bir farklılık vardır*"

"*Sütunlar arasında anlamlı bir farklılık vardır*"

ve

"*Yunan harfleri arasında anlamlı bir farklılık vardır*"

denir. ♣

Yukarıda elde edilen bilgiler ışığında, Greko-Latin karesi tasarımı için ANOVA tablosu, aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur.

Kaynak	df	SS	MS	F
Denemeler	$r-1$	SS_{Deneme}	MS_{Deneme}	F_{Deneme}
Satırlar	$r-1$	SS_{Satir}	MS_{Satir}	F_{Satir}
Sütunlar	$r-1$	SS_{Sutun}	MS_{Sutun}	F_{Sutun}
Yunan	$r-1$	SS_{Yunan}	MS_{Yunan}	F_{Yunan}
Hata	$(r-1)(r-3)$	SS_{Hata}	MS_{Hata}	
Genel	$N-1$	SS_{Toplam}		

Ön Bilgi

- Bu bölümde sadece Latin Karesi tasarımı içn beklenen kareler ortalaması verilmiştir.
- Greko-Latin Karesi tasarımı için beklenen kareler ortalamaları benzer şekilde elde edilir.

Beklenen Deneme Kareler Ortalaması

(1) modelinde,

$$E(MS_{Deneme}) = \sigma^2 + \frac{r}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\tau_i^2 \qquad (42)$$

elde edilir.

- *(42) eşitliğinden görülmektedir ki, MS_{Deneme}, sıfır hipotezinin doğru olması durumunda σ^2 nin yansız bir tahmin edicisidir.*

Beklenen Satır Kareler Ortalaması

(1) modelinde,

$$E(MS_{Satir}) = \sigma^2 + \frac{r}{r-1}\sum_{j=1}^{r}\gamma_j^2 \tag{43}$$

dir.

- (43) *denkleminden görülmektedir ki,* MS_{Satir}*, sıfır hipotezinin doğru olması durumunda* σ^2 *nin yansız bir tahmin edicisidir.*

Beklenen Sütun Kareler Ortalaması

(1) modelinde,

$$E(MS_{Sutun}) = \sigma^2 + \frac{r}{r-1}\sum_{k=1}^{r}\delta_k^2 \tag{44}$$

dir.

- (44) *denkleminden görülmektedir ki,* MS_{Sutun}*, sıfır hipotezinin doğru olması durumunda* σ^2 *nin yansız bir tahmin edicisidir.*

Beklenen Hata Kareler Ortalaması

(1) modelinde,

$$E(MS_{Hata}) = \sigma^2 \tag{45}$$

dir.

- (45) *denkleminden görülmektedir ki,* MS_{Hata}*, her zaman* σ^2 *nin yansız bir tahmin edicisidir.*