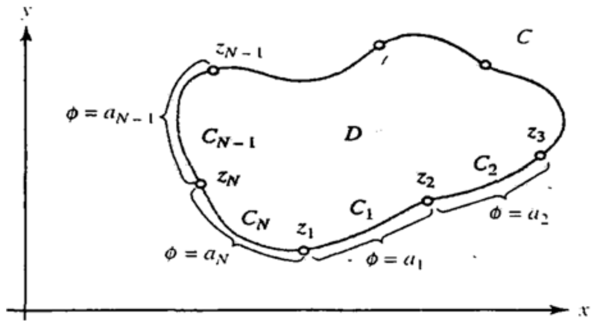
1.4. Basit Bağlantılı Bir Bölge İçin N-Değer Dirichlet Problemi

D basit bağlantılı bir bölge, C D nin sınırı olan basit kapalı çevre ve $z_1, z_2, \ldots, z_N$ C üzerinde bulunan ve pozitif yönde sıralanmış N tane nokta olsun. $k = 1,2,\ldots, N-1$ için C nin z_k ve z_{k+1} noktaları arasındaki parçasını C_k ile ve z_N ile z_1 arasındaki parçasını C_N ile gösterelim. Son olarak, $a_1, a_2, \ldots, a_N$ reel sabitler olsun. "D de harmonik ve $D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_N$ üzerinde sürekli bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulmak istiyoruz öyle ki

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= a_1, \quad z = x+iy \in C_1 \\
\phi(x,y) &= a_2, \quad z = x+iy \in C_2 \\
&\vdots \\
\phi(x,y) &= a_N, \quad z = x+iy \in C_N
\end{aligned}$$

sınır koşulları sağlanır."



Şekil 6

ϕ yi bulmak için bir yöntem D yi $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzlemine dönüştüren bir $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ konform dönüşümü bulmaktır öyle ki bu dönüşüm ile N tane $z_1, z_2, \ldots, z_N$ noktaları w-düzleminde u-ekseni boyunca $k = 1,2,\ldots, N-1$ için $u_k = f(z_k)$ noktalarına ve z_N de $u_N = +\infty$ üzerine dönüşür.

Laplace denkleminin değişmezliği teoremini kullanırsak $w = f(z)$ konform dönüşümü ile $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzleminde yeni bir N-değer Dirichlet problemi elde edilir. Eğer $a_0 = a_N$ denirse bu durumda D deki Dirichlet probleminin yukarıda verilen sınır koşullarını sağlayan çözümü

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1} \left(a_{k-1} - a_k\right) Arg\left(f(z) - u_k\right) \\
&= a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1} \left(a_{k-1} - a_k\right) Arc\tan \frac{v(x,y)}{u(x,y) - u_k}
\end{aligned}$$

dir. Bu yöntem, D yi $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzlemine dönüştüren bir konform dönüşümün bulunabilmesine bağlıdır. Riemann dönüşüm teoremi böyle bir konform dönüşümün varlığını garanti eder.

Örnek 1.4.1. $|z|<1$ birim diskinde harmonik olan ve

$$\phi(x,y)=0,\ z=x+iy=e^{i\theta},\ 0<\theta<\pi$$
$$\phi(x,y)=1,\ z=x+iy=e^{i\theta},\ \pi<\theta<2\pi$$

sınır koşullarını sağlayan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz.

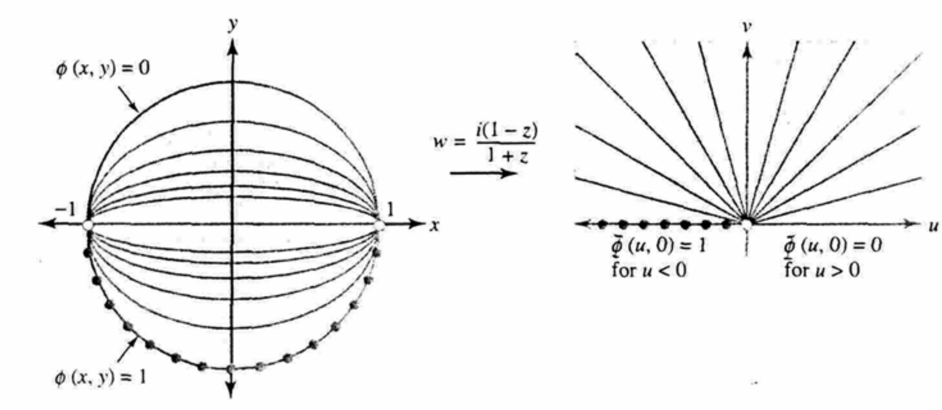
Çözüm. Örnek 0.2.10 da gösterildiği gibi

$$w=u+iv=\frac{i(1-z)}{1+z}=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2} \qquad (1.2)$$

fonksiyonu $|z|<1$ birim diskini $\operatorname{Im} w>0$ üst yarı-düzlemine dönüştüren bir bire-bir konform dönüşümdür. (1.2) denklemine göre $y>0,\ 1-x^2-y^2=0$ üst yarım çemberi üzerinde bulunan $z=x+iy$ noktaları pozitif u-ekseni üzerine dönüşür. Benzer şekilde alt yarı çember negatif u-ekseni üzerine dönüşür. Ayrıca, $w=f(z)$ konform dönüşümü ile yeni bir Dirichlet problemi ortaya çıkar: " $\operatorname{Im} w>0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan ve

$$\Phi(u,0)=0,\ u>0$$
$$\Phi(u,0)=1,\ u<0$$

sınır koşullarını sağlayan bir $\Phi(u,v)$ fonksiyonu bulunuz".



Şekil 7

Örnek 1.3.1 deki sonucu ve (1.2) denklemini kullanırsak

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{v(x,y)}{u(x,y)}=\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{1-x^2-y^2}{2y}$$

elde ederiz.

Örnek 1.4.2. $H:\operatorname{Im} z>0, |z|<1$ üst yarı-diskinde harmonik olan ve

$$\phi(x,y)=0\,,\quad z=x+iy=e^{i\theta}\,,\ 0<\theta<\pi$$
$$\phi(x,0)=1\,,\quad -1<x<1$$

sınır koşullarını sağlayan bir ϕ fonksiyonu bulunuz.

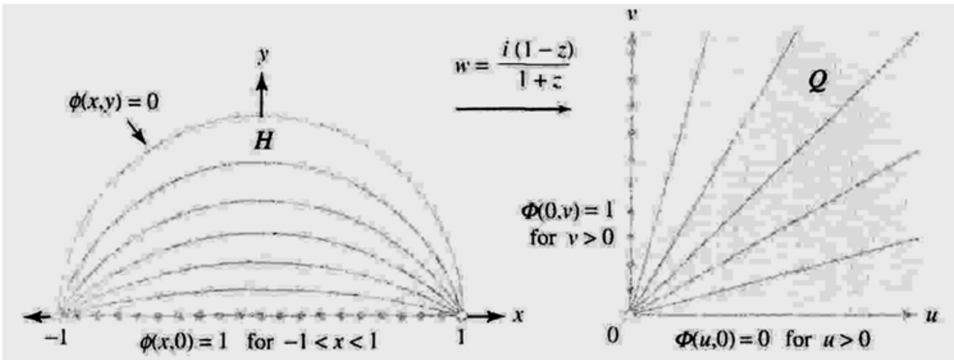
Çözüm. $w=u+iv=\dfrac{i(1-z)}{1+z}$ dönüşümü H yarı-diskini $Q:u>0,\ v>0$ birinci bölgesi üzerine dönüştürür. $y=0,\ -1<x<1$ doğru parçası üzerinde bulunan $z=x+iy$ noktaları da pozitif v-ekseni üzerine dönüşür. Şimdi Q daki yeni Dirichlet problemi "Q da harmonik olan ve

$$\Phi(u,0)=0,\ u>0$$
$$\Phi(0,v)=1,\ v>0$$

sınır koşullarını sağlayan bir $\Phi(u,v)$ fonksiyonu bulunuz" şeklindedir. Bu durumda önceki kesimdeki Örnek 1.2.2 deki $\Phi(u,v)$ fonksiyonunun bulunması yöntemi ile

$$\Phi(u,v)=0+\frac{1-0}{\pi/2}Arg\,w=\frac{2}{\pi}Arg\,w=\frac{2}{\pi}Arc\tan\frac{v}{u}$$

elde edilir.



Şekil 8

H daki Dirichlet probleminin çözümü, (1.2) den

$$\phi(x,y)=\frac{2}{\pi}Arc\tan\frac{v(x,y)}{u(x,y)}=\frac{2}{\pi}Arc\tan\frac{1-x^2-y^2}{2y}$$

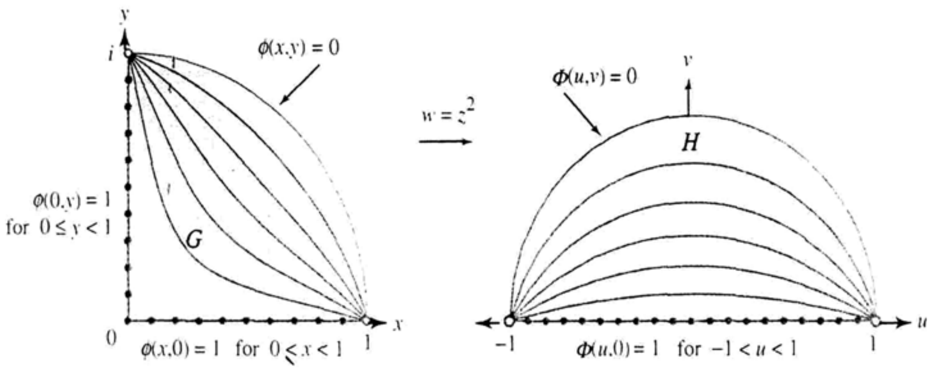
olur.

Örnek 1.4.3. $G:x>0\,,\ y>0\,,\ |z|<1$ çeyrek diskinde harmonik olan ve

$$\phi(x,y)=0\,,\ z=x+iy=e^{i\theta}\,,\ 0<\theta<\pi/2$$
$$\phi(x,0)=1\,,\quad 0\le x<1$$
$$\phi(0,y)=1\,,\quad 0\le y<1$$

sınır koşullarını sağlayan bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz.

Çözüm. $w = u + iv = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ fonksiyonu çeyrek diski $H : v > 0$, $|w| < 1$ üst yarı diskinin üzerine dönüştürür. H daki yeni Dirichlet problemi Şekil 9 da gösterilmiştir.



Şekil 9

Örnek 1.4.2 deki sonuçtan H daki $\Phi(u,v)$ çözümü

$$\Phi(u,v) = \frac{2}{\pi} Arc\tan\frac{1 - u^2 - v^2}{2v}$$

dir. $w = z^2$ den $u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2$ ve $2v = 4xy$ dir, buradan G deki ϕ çözümü

$$\phi(x,y) = \frac{2}{\pi} Arc\tan\frac{1 - (x^2 + y^2)^2}{4xy}$$

bulunur.

Problemler.

1. $\{z : |z| < 1\}$ birim diskinde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

   $\phi(x, y) = 8, \quad x + iy = z = e^{i\theta}, \; 0 < \theta < \pi$

   $\phi(x, y) = 4, \quad x + iy = z = e^{i\theta}, \; \pi < \theta < 2\pi$

   sınır koşulları sağlansın.

2. $\{z : |z| < 1, \; y > 0\}$ üst yarım diskinde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

   $\phi(x, y) = 5, \quad x + iy = z = e^{i\theta}, \; 0 < \theta < \pi$

   $\phi(x, 0) = -5, \; -1 < x < 1$

   sınır koşulları sağlansın.

3. $\{z : \operatorname{Im} z > 0 \ \text{ ve } \ |z| > 1\}$ (yani üst yarı düzlemin birim çemberin dışında kalan kısmı) bölgesinde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(x, y) = 1, \quad |z| = 1, \quad 0 < \arg z < \pi$$

$$\phi(x, y) = -1, \quad |x| > 1,$$

sınır koşulları sağlansın.