2. İKİ BOYUTLU MATEMATİKSEL MODELLER

2.1. Genel Bilgiler

Şimdi konform dönüşüm teknikleri ile çözülebilen kararlı durum ısı akışı, elektrostatik ve ideal sıvı akışı ile ilgili problemleri göz önüne alacağız. Konform dönüşüm, bir bölgedeki problemin çözümünün kolayca elde edilebilmesi için bu bölgeyi diğer bir bölgeye dönüştürür. Bizim çözümlerimiz sadece x ve y iki değişkenli olduğundan modelin geçerliliği için önce temel bir kabul yapmalıyız.

Burada inceleyeceğimiz fiziksel problemler gerçek hayattaki uygulamalardır ve çözümleri üç-boyutlu kartezyen uzayda verilir. Böyle problemler genellikle üç değişkenli Laplace denklemi, üç-boyutlu vektör fonksiyonlarının curl ve divergens ini içerir. Kompleks analiz x ve y değişkenlerini içerdiğinden, xy düzlemine dik eksen boyunca koordinatlı noktalarda çözümün değişmediği özel durumu göz önüne alacağız. Kararlı durum ısı akışı ve elektrostatik için, bu demektir ki T sıcaklığı veya V potansiyeli sadece x ve y ile değişir. Böylece ideal sıvı akışı için z -düzlemine paralel herhangi bir düzlemde sıvı hareketi aynıdır. " z -düzlemindeki eğri çizimleri z -düzlemine dik sonsuz silindire karşılık gelen çapraz kesitler olarak yorumlanır ". Bir sonsuz silindir bir uzun fiziksel silindirin limit durumudur, böylece bizim vereceğimiz matematiksel model "yeteri kadar uzun bir fiziksel silindiri içeren üç boyutlu problemin uç noktalardaki etkisi ihmal edilmek koşulu ile geçerlidir.

Önceki kısımlarda harmonik fonksiyonlar için $\phi(x, y)$ çözümlerinin nasıl bulunacağını göstermiştik. Uygulamalar için $\{\phi(x, y) = K_1 :\ K_1\ bir\ reel\ sabit\}$ düzey eğrileri ailesini ve $\psi(x, y)$ harmonik eşlenik fonksiyonu ve onun $\{\psi(x, y) = K_2 :\ K_2\ bir\ reel\ sabit\}$ düzey eğrileri ailesini göz önüne almamız gereklidir. $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ analitik fonksiyonuna **kompleks potansiyel** adını vereceğiz.

Aşağıdaki teorem düzey ailelerinin ortogonalliği ile ilgilidir. Bu teoremi göz önüne alacağımız fiziksel uygulamalarla ilgili fikirleri geliştirmek için kullanacağız.

Teorem 2.1.1. (Düzey eğrilerinin ortogonal aileleri) $\phi(x, y)$ bir D bölgesinde harmonik, $\psi(x, y)$ onun harmonik eşleniği ve $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ kompleks potansiyel olsun. Bu durumda $\{\phi(x, y) = K_1\}$ ve $\{\psi(x, y) = K_2\}$ düzey eğrileri aileleri ortogonaldir. Yani, $\phi(x, y) = K_1$ ve $\psi(x, y) = K_2$ eğrileri (a, b) de kesişiyorsa ve eğer $F'(a + ib) \neq 0$ ise bu durumda bu iki eğri dik kesişirler.

İspat. $\phi(x, y) = K_1$ bir düzlem eğrisinin bir kapalı denklemi olduğundan (a, b) noktasında hesaplanan $grad\phi$ gradiyent vektörü (a, b) de eğriye diktir. Bu vektör

$$N_1 = \phi_x(a, b) + i\phi_y(a, b)$$

ile verilir. Benzer biçimde N_2 vektörü

$$N_2 = \psi_x(a,b) + i\psi_y(a,b)$$

ile tanımlanır ve bu vektör (a,b) de $\psi(x,y) = K_2$ eğrisine diktir. Cauchy-Riemann denklemlerini kullanırsak N_1 ile N_2 nin iç çarpımı

$$\begin{aligned} N_1.N_2 &= \phi_x(a,b).\psi_x(a,b) + \phi_y(a,b).\psi_y(a,b) \\ &= -\phi_x(a,b)\phi_y(a,b) + \phi_y(a,b)\phi_x(a,b) = 0 \end{aligned}$$

dır. Buna ek olarak $F'(a,b) \neq 0$ olduğundan

$$\phi_x(a,b) + i\psi_x(a,b) \neq 0$$

olur. Cauchy-Riemann denklemleri ve $\phi_x(a,b) \neq 0$, $\psi_x(a,b) \neq 0$ olması, hem N_1 ve hem de N_2 nin sıfırdan farklı olduğunu gösterir. Böylece, $N_1.N_2 = 0$ olması, N_1 in N_2 ye dik olmasını gerektirir. Dolayısıyla bu eğriler ortogonaldir. Teoremin ispatı tamamlanmış olur.
●

$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ kompleks potansiyeli birçok fiziksel yorumlara sahiptir. Örneğin; kabul edelim ki kararlı durum sıcaklığında bir problem çözmüş olalım. Bu durumda aynı sınır koşulları ile elektrostatikte izotermalleri eşpotansiyel eğrileri ve ısı akış doğrularını akı doğruları olarak yorumlayarak bir benzer probleme çözüm bulabiliriz. Buradan "ısı akışı ve elektrostatik direkt olarak birbirine karşılık gelir" diyebiliriz.

Bir sıvı akışı problemini çözmüş olalım. Bu durumda sıvı akışında eşpotansiyelleri izotermaller ve akı doğrularını ısı akış doğruları olarak yorumlayarak benzer bir probleme çözüm bulabiliriz. Aşağıdaki tabloda düzey eğrileri ailelerinin değişik yorumları ve aileler arasındaki eşlemeler özetlenmiştir.

Fiziksel Olaylar	$\phi(x,y) = sabit$	$\psi(x,y) = sabit$
Isı akışı	İzotermaller	Isı akış doğruları
Elektrostatik	Eşpotansiyel eğrileri	Akı doğruları
Sıvı akışı	Eşpotansiyeller	Akıntı doğrular
Yerçekimi alanı	Yerçekimi potansiyeli	Kuvvet doğruları
Manyetizm	Potansiyel	Kuvvet doğruları
Difüzyon	Konsantrasyon	Akış doğruları
Elastisite	Gerilim fonksiyonu	Şiddet doğruları
Elektrik akımı	Potansiyel	Akış doğruları

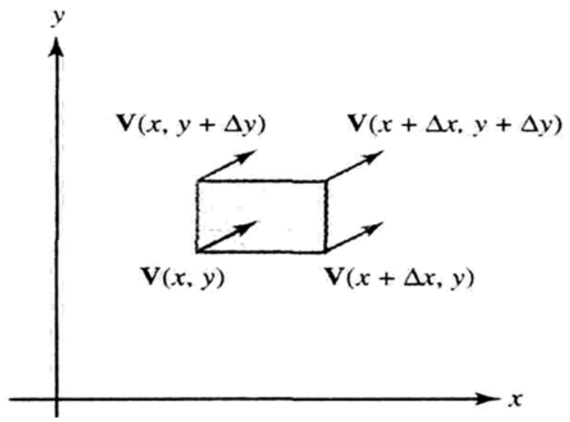
2.2. Kararlı Durum Sıcaklıkları

Isı iletimi teorisinde ısının sıcaklığın azaldığı yöne doğru aktığı kabul edilir. Diğer bir kabul de ısının bir yüzey alanı boyunca akarken, zaman oranı ile yüzey alanına dik yöndeki sıcaklık gradiyentinin bileşeninin orantılı olmasıdır. Eğer $T(x,y)$ sıcaklığı zamandan bağımsız ise, bu durumda (x,y) noktasındaki ısı akışı

$$V(x,y) = -K\, grad\, T(x,y) = -K\left[T_x(x,y) + iT_y(x,y)\right]$$

vektörü ile verilir, burada K ortamın ısı iletkenliğidir ve sabit olduğu kabul edilir. Eğer Δs uzunluğunun düz-doğru parçasını Δz ile gösterirsek bu durumda bir birimlik zaman aralığında akan ısı miktarı $V.N\Delta s$ dir, burada N, doğru parçasına dik birim vektördür.

Eğer bölgede üretilen ya da yok edilen termal enerjinin bulunmadığını kabul edersek, bu durumda Δx ve Δy uzunlukları tarafındaki yönlü herhangi bir küçük dikdörtgen boyunca akan ısının net miktarı özdeş olarak sıfırdır. Bu $T(x,y)$ nin bir harmonik fonksiyon olduğunu gösterir.



Şekil 11

Aşağıdaki düşünce $T(x,y)$ nin Laplace denklemini sağladığını göstermek için sıkça kullanılır. $V.N\Delta s$ ifadesini kullanarak şekildeki dikdörtgenin sağ kenarının dışına ısı akışının miktarı yaklaşık olarak

$$\begin{aligned} V\, N_1 \Delta s_1 &= -K\left[T_x(x+\Delta x, y) + iT_y(x+\Delta x, y)\right].(1+0i)\Delta y \\ &= -K\, T_x(x+\Delta x, y)\Delta y \end{aligned}$$

ve sol kenarın dışına ısı akışının miktarını da

$$\begin{aligned} V.N_2 \Delta s_2 &= -K\left[T_x(x,y) + iT(x,y)\right].(-1+0i)\Delta y \\ &= K\, T_x(x,y)\Delta y \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Bu iki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$-K\left[\frac{T_x(x+\Delta x, y)-T_x(x, y)}{\Delta x}\right]\Delta x\,\Delta y \cong -K\,T_{xx}(x, y)\Delta x\,\Delta y$$

buluruz. Benzer şekilde üst ve alt kenarlar dışına ısı akış miktarı için

$$-K\left[\frac{T_y(x, y+\Delta y)-T_y(x, y)}{\Delta y}\right]\Delta x\,\Delta y \cong -K\,T_{yy}(x, y)\Delta x\,\Delta y$$

buluruz. Bu iki denklemdeki miktarlar toplanırsa dikdörtgenin dışına net ısı akışı yaklaşık olarak

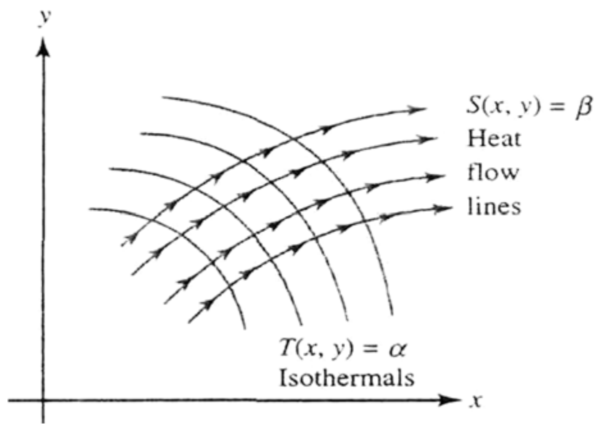
$$-K\left[T_{xx}(x, y)+T_{yy}(x, y)\right]\Delta x\,\Delta y = 0$$

denklemi ile verilir. Bu da $T(x, y)$ nin Laplace denklemini sağladığını ve dolayısıyla bir harmonik fonksiyon olduğunu gösterir.

Eğer $T(x, y)$ nin tanımlandığı bölge basit bağlantılı bölge ise, bu durumda bir $S(x, y)$ harmonik eşlenik fonksiyonu vardır ve

$$F(z) = T(x, y) + iS(x, y)$$

bir analitik fonksiyondur. $T(x, y) = K_1$ eğrilerine izotermaller denir ve bunlar aynı sıcaklıktaki noktaları birleştiren doğrulardır. $S(x, y) = K_2$ eğrilerine ısı akış doğruları denir ve bu eğriler boyunca yüksek sıcaklıktaki noktalardan düşük sıcaklıktaki noktalara ısı akışı olduğu düşünülür. Kararlı durum sıcaklıkları için sınır değer problemleri Dirichlet problemi olarak göz önüne alınabilir, burada $T(x, y)$ harmonik fonksiyonunun değeri (x, y) noktasındaki sıcaklık olarak yorumlanır.



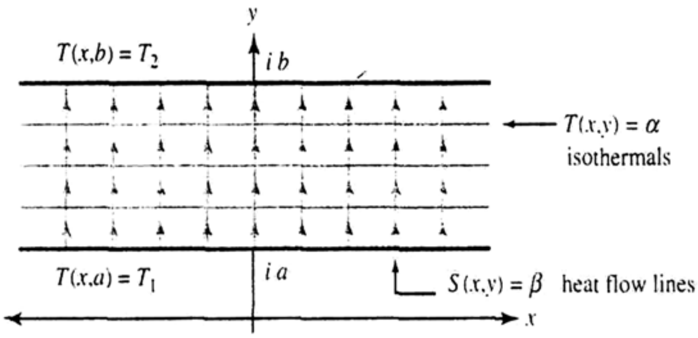
Şekil 12

Örnek 2.2.1. İki paralel düzlemin z-düzlemine dik ve sırasıyla, $y = a$ ve $y = b$ yatay doğrularından geçtiğini ve bu düzlemler üzerinde sıcaklığın $T(x, a) = T_1$ ve $T(x, b) = T_2$ değerlerinde sabit tutulduğunu kabul edelim. Bu durumda T nin

$$T(x,y) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{b-a}(y-a)$$

ile verilebileceğini gösteriniz.

Çözüm. $y = y_0$ doğrusundan geçen düzlem üzerindeki tüm noktalarda sıcaklığın sabit olduğunu kabul edebiliriz. Buradan $T(x,y) = t(y)$ dir, burada $t(y)$ sadece y nin bir fonksiyonudur. Laplace denklemi $t''(y) = 0$ olmasını gerektirir ve Örnek 1.2.1 deki yöntem ile $T(x,y)$ çözümünü bulabiliriz.



Şekil 13

$T(x,y) = \alpha$ izotermallerinin yatay doğrular olduğu kolayca görülür. Eşlenik harmonik fonksiyon

$$S(x,y) = \frac{T_1 - T_2}{b-a}\,x$$

dir ve $S(x,y) = \beta$ ısı akış doğruları, yatay doğrular arasındaki düşey doğru parçalarıdır. Eğer $T_1 > T_2$ ise bu durumda Şekil 13 de görüldüğü gibi ısı $y = a$ dan geçen düzlemden $y = b$ den geçen düzleme bu doğru parçaları boyunca akar.

Örnek 2.2.2. $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzlemindeki her bir noktada $T(x,y)$ sıcaklığını bulunuz öyle ki x-ekseni boyunca sıcaklık

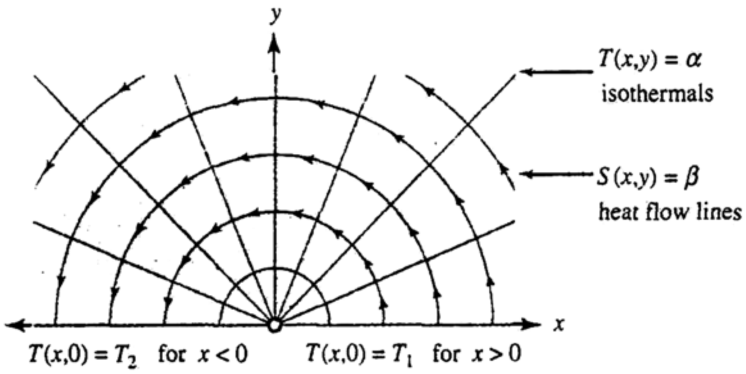
$$T(x,0) = T_1 \quad , \quad x > 0$$
$$T(x,0) = T_2 \quad , \quad x < 0$$

olsun.

Çözüm. $T(x,y)$ bir harmonik fonksiyon olduğundan, bu problem bir Dirichlet problemi örneğidir. Örnek 1.2.2 den

$$T(x,y) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\pi} Arg\, z$$

olduğu görülür.



Şekil 14

$T(x, y) = \alpha$ izotermali orijinden çıkan ışınlardır. Eşlenik harmonik fonksiyon

$$S(x, y) = \frac{1}{\pi}(T_1 - T_2)\ln|z|$$

dir ve $S(x, y) = \beta$ ısı akış doğruları orijin merkezli yarım çemberlerdir (Şekil 14). Eğer $T_1 > T_2$ ise, bu durumda ısı yarım çemberler boyunca saat yönünün ters yönünde akar.

Örnek 2.2.3. $H : \operatorname{Im} z > 0$, $|z| < 1$ üst yarım diskindeki her bir noktadaki $T(x, y)$ sıcaklığını bulunuz öyle ki bu sıcaklık, sınır üzerindeki noktalarda

$$\begin{aligned} T(x, y) &= 100 \quad , \quad x + iy = z = e^{i\theta} \quad , \; 0 < \theta < \pi \\ T(x, 0) &= 50 \qquad , \; -1 < x < 1 \end{aligned}$$

koşullarını sağlasın.

Çözüm. Örnek 1.4.2 de belirtildiği gibi

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i\,\frac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

fonksiyonu H yarım diskini $Q : u > 0$, $v > 0$ birinci bölge üzerine birebir konform olarak dönüştürür. Buradan yeni problemimiz : "$T^*(u, v)$ sıcaklığını bulunuz öyle ki

$$\begin{aligned} T^*(u, 0) &= 100 \; , \; u > 0 \\ T^*(0, v) &= 50 \;\; , \; v > 0 \end{aligned}$$

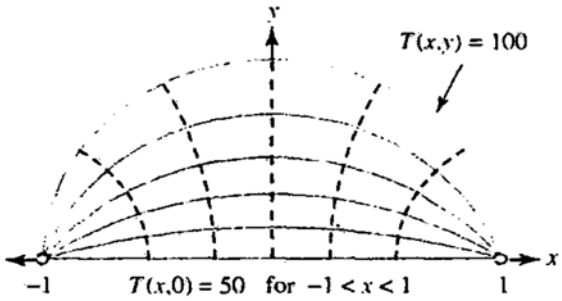
sınır koşulları sağlansın" biçiminde olacaktır. Örnek 1.2.2 den $T^*(u, v)$ harmonik fonksiyonu

$$T^*(u,v) = 100 + \frac{50-100}{\pi/2} \, Arg\, w = 100 - \frac{100}{\pi} Arc\tan\frac{v}{u}$$

olarak elde edilir. O halde

$$T(x,y) = 100 - \frac{100}{\pi} Arc\tan\frac{1-x^2-y^2}{2y}$$

dir. $T(x,y)=C$ izotermalleri Şekil 15 de görüldüğü gibi ± 1 noktalarından geçen çemberlerdir.



Şekil 15

Problemler.

1. $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı düzleminde öyle bir $T(x,y)$ sıcaklığı bulunuz ki x-ekseni boyunca sıcaklık

$$T(x,0) = 90, \; x > 0$$
$$T(x,0) = 60, \; x < 0$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca, ısı akış doğrularını ve izotermalleri belirleyip şekil üzerinde gösteriniz.

2. $y = x$ ve $y = x+1$ doğruları tarafından sınırlanan sonsuz şeritte öyle bir $T(x,y)$ sıcaklık fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(x,x) = 30, \; \forall x \in R$$
$$\phi(x,x+1) = 80, \; \forall x \in R$$

sınır koşullarını sağlasın.

3. $\{(x,y): x>0,\ y>0\}$ birinci çeyrek bölgesinde öyle bir $T(x,y)$ sıcaklığı bulunuz ki bu sıcaklık

$$T(x,0) = 10, \; x > 1 \qquad T(0,y) = 20, \; 0 \le y < 1$$
$$T(x,0) = 20, \; 0 < x < 1 \quad \text{ve} \quad T(0,y) = 10, \; y > 1$$

sınır koşullarını sağlasın.

4. $\{z : \operatorname{Im} z > 0 \ \text{ ve } \ |z| > 1\}$ (yani üst yarı düzlemin birim çemberin dışında kalan kısmı) bölgesinde harmonik olan öyle bir $T(x, y)$ sıcaklık fonksiyonu bulunuz ki

$$\mathrm{T}(x, y) = 120, \quad |z| = 1, \quad 0 < \arg z < \pi$$

$$\mathrm{T}(x, y) = 10, \quad |x| > 1,$$

sınır koşulları sağlansın.