3.2 Laplace Dönüşümü

Bu kesimde mühendislik uygulamalarında çok kullanışlı bir araç olan Laplace dönüşümünü inceleyeceğiz. Biliyoruz ki parçalı sürekli reel değerli bir $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$, ω reel değişkenli ve kompleks değerli bir fonksiyon tanımlar. Eğer integrantı $e^{-\sigma t}$ ile çarparsak bu durumda bir $G(\sigma + i\omega)$ kompleks fonksiyonu elde ederiz:

$G(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt$. $G(\sigma + i\omega)$ fonksiyonuna iki taraflı Laplace dönüşümü denir.

$G(\sigma + i\omega)$ nin varlığı için $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$ olması yeterlidir. Bir $a < \sigma < b$ arlığındaki σ değerleri için bu integral sonludur. Bir çok fiziksel uygulamalarda sadece $t \geq 0$ için inceleme yapıldığından $f(t)$ nin tek taraflı Laplace dönüşümünü tanımlamak daha kullanışlı olmaktadır:

Tanım 3.2.1. (Laplace Dönüşümü). $f(t)$ parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin Laplace dönüşümü $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ olarak tanımlanır, burada $s = \sigma + i\omega$ dir.

Ters Laplace dönüşümü de $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F(s)e^{st}ds$ ile tanımlanır.

Laplace dönüşümünün varlığı için $|f(t)|$ nin $t \to +\infty$ iken çok hızlı büyümemesidir. Eğer $|f(t)| \leq Me^{Kt}$ eşitsizliği her $t \geq 0$ için sağlanacak biçimde $M > 0$ ve K reel sabitleri varsa bu durumda f fonksiyonuna üstel mertebedendir denir. Bu bölümdeki tüm fonksiyonların üstel mertebeden olduğunu kabul edeceğiz. Aşağıdaki teorem $F(\sigma + i\tau)$ Laplace dönüşümünün $\mathrm{Re}(s) > K$ sağ yarı düzlemini içine alan bir bölgedeki s değerleri için var olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.2.2. (Laplace dönüşümünün varlığı). Eğer f fonksiyonu üstel mertebeden ise bu durumda $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ Laplace dönüşümü $F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ ile verilir, burada $s = \sigma + i\tau$. Bu durumda F için tanımlanan integral $\sigma > K$ sağ yarı düzleminde bulunan $s = \sigma + i\tau$ değerleri için vardır.

İspat. $F(s)$ nin tanımında $s = \sigma + i\tau$ yazarsak

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\cos(\tau t)dt - i\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\sin(\tau t)dt$$

elde ederiz. $\sigma > K$ için

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t}|\cos(\tau t)|dt \le M\int_0^\infty e^{(K-\sigma)t}dt \le \frac{M}{\sigma-K} \text{ ve}$$

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t}|\sin(\tau t)|dt \le M\int_0^\infty e^{(K-\sigma)t}dt \le \frac{M}{\sigma-K}$$

elde ederiz. Bu da F nin reel ve imajiner kısımlarında tanımlanan integrallerin $\operatorname{Re}(s) > K$ için varlığını gösterir ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3 (Laplace dönüşümünün tekliği). f ve g nin Laplace dönüşümleri sırasıyla F ve G olsun. Eğer $F(s) = G(s)$ ise bu durumda $f(t) = g(t)$ dir.

İspat. Eğer σ yeteri kadar büyük ise bu durumda ters Laplace dönüşümünü kullanarak

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F(s)e^{st}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} G(s)e^{st}ds = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(t) \end{aligned}$$

buluruz, böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4. (Laplace dönüşümünün lineerliği). f ve g nin Laplace dönüşümleri sırasıyla F ve G olsun. Eğer a ve b reel sabitler ise bu durumda $\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = aF(s)+bG(s)$ dir.

İspat. $\operatorname{Re}(s) > K$ için F ve G nin her ikisi de tanımlı olacak biçimde K yı seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(af(t)+bg(t)) &= \int_0^\infty [af(t)+bg(t)]e^{-st}dt \\ &= a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\ &= aF(s)+bG(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.5. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < c \\ 0, & c < t \end{cases}$ ile tanımlanan basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümünün $\mathcal{L}(f(t)) = \dfrac{1-e^{-cs}}{s}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\mathcal{L}(f(t))$ nin tanımından

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^c e^{-st}dt + \int_c^\infty 0.e^{-st}dt = \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_{t=0}^{t=c} = \frac{1-e^{-cs}}{s}$$

elde ederiz.

Örnek 3.2.6. a bir reel sabit olmak üzere $\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\mathcal{L}(f(t))$ nin tanımından

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(a-s)t}dt = \lim_{R\to\infty}\left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_{t=0}^{t=R} = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{(a-s)R}}{a-s} + \frac{1}{s-a}$$

Elde ederiz. Şimdi $s = \sigma + i\tau$ sabitleyelim, eğer $\sigma > a$ ise bu durumda $a - \sigma < 0$ ve buradan $\lim_{R\to\infty} e^{(a-s)R} = 0$ olur ve böylece istenen elde edilmiş olur.

Örnek 3.2.7. $\mathcal{L}(\sinh at) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$ olduğunu Laplace dönüşümünün lineerliğini kullanarak gösteriniz.

Çözüm. $sinhat = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}$ olduğundan

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

bulunur.