Örnek 3.2.8. $\mathcal{L}(t)=\dfrac{1}{s^2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Kısmi integrasyon metodu ile

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R te^{-st}dt\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=R}\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-R}{s}e^{-sR}-\frac{1}{s^2}e^{-sR}\right)+0+\frac{1}{s^2}=0\end{aligned}$$

elde ederiz, burada $\mathrm{Re}(s)>0$ sağ yarı düzleminde bulunan s değerleri için dönüşüm tanımlı olur çünkü sadece bu durumda $\lim_{R\to\infty} e^{sR}=0$ olmaktadır.

Örnek 3.2.9. $\mathcal{L}(\cos bt)=\dfrac{s}{s^2+b^2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\mathcal{L}(e^{ibt})=\dfrac{1}{s-ib}$ ve $\mathcal{L}(e^{-ibt})=\dfrac{1}{s+ib}$ olduğundan

$$\mathcal{L}(\cos bt)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{ibt})-\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-ibt})=\frac{1}{2}\frac{1}{s-ib}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+ib}=\frac{s}{s^2+b^2}$$

elde edilir.

Problemler.

1. $\mathrm{Re}(s)>0$ olduğunu göz önüne alarak $\mathcal{L}(1)=\dfrac{1}{s}$ olduğunu gösteriniz.
2. $f(t)=\begin{cases}1, & 1<t<2\\ 0, & diğer\ durumlar\end{cases}$ fonksiyonu için $\mathcal{L}(f(t))$ Laplace dönüşümünü bulunuz.
3. $f(t)=\begin{cases}t, & 1<t<c\\ 0, & diğer\ durumlar\end{cases}$ fonksiyonu için $\mathcal{L}(f(t))$ Laplace dönüşümünü bulunuz.
4. $f(t)=\begin{cases}e^{at}, & 0\le t<1\\ 0, & diğer\ durumlar\end{cases}$ fonksiyonu için $\mathcal{L}(f(t))$ Laplace dönüşümünü bulunuz.
5. $\mathrm{Re}(s)>0$ olduğunu göz önüne alarak $\mathcal{L}(t^2)=\dfrac{2}{s^3}$ olduğunu gösteriniz.

3.2 Öteleme Teoremi

Teorem. 3.2.1. Eğer $f(t)$ nin Laplace dönüşümü $F(s)$ ise bu durumda $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$ dır.

İspat. $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ den $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt == \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$ elde edilir.

Örnek 12.6.2. $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Eğer $f(t) = t^n$ alırsak $F(s) = \mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ bulunur. Yukarıdaki öteleme teoreminden

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = F(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Problemler.

1. $\mathcal{L}(e^t - te^t)$ Laplace dönüşümünü bulunuz.
2. $\mathcal{L}(e^{-4t}\sin 3t)$ Laplace dönüşümünü bulunuz.
3. $\mathcal{L}(e^{at}\cos bt) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ olduğunu gösteriniz.
4. $\mathcal{L}(e^{at}\sin bt) = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$ olduğunu gösteriniz.