2. HAFTA

BÖLÜM 1 : KATI CİSİMLERİN TEMEL DİNAMİĞİ

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ

EYLEMSİZLİK MOMENTİ

- Herhangi bir eksene göre eylemsizlik momenti, kütle merkezine göre eylemsizlik momenti ile cismin kütlesi ile eksenler arası uzaklığın karesinin çarpımının toplamına eşittir.

$$I = I_c + Ml^2$$

- Burada l eksenler arası uzaklıktır.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ

- Bu eylemsizlik momentine göre kinetik enerji

$$K = \frac{1}{2} I_{cz}\omega^2 + \frac{1}{2} M r_c^2 \omega^2$$

- Dönen bir levhanın kinetik enerjisi, kütle merkezine göre enerji ile dönme eksenine göre, kütle merkezinin öteleme enerjisinin toplamına eşittir. Bu, yalnız dönen bir levha için geçerli olmayıp genel bir sonuçtur.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ

- Dönen levhanın açısal momentumu

$$\boldsymbol{J} = \sum m_i r_c^2 \omega \bar{z} = I_z \omega \bar{z}$$

- Kütle merkezi göz önüne alınırsa

$$\boldsymbol{J} = I_{cz} \omega \bar{z} + M r_c^2 \omega \bar{z}$$

EYLEMSİZLİK MOMENTİ

- Bu teorem genel durumlar içinde geçerlidir. Yani, herhangi bir noktaya göre açısal momentum, kütle merkezine göre açısal momentumla, kütle merkezinin o noktaya göre açısal momentumunun toplamına eşittir.

- Düzlemsel levha için ispatlanan bu teoremler, çok sayıda levhanın üst üste gelmesi ile oluşan prizma veya silindir gibi cisimler içinde geçerlidir. Yalnız burada $\boldsymbol{r}_i$ dönme eksenine olan uzaklık olarak düşünülmelidir.

Dik Eksen Teoremi

- m_i, kütle elemanlarına sahip dönen levha göz önüne alınsın. z-eksenine göre I_z eylemsizlik momentine m_i kütlesinin katkısı $m_i r_i^2$’dir.

- x-eksenine göre dönme alınırsa, m_i kütle elemanının I_x’e katkısı $m_i y_i^2$, y-eksenine göre dönme alınırsa m_i kütle elemanının I_y’e katkısı $m_i x_i^2$ olmaktadır.

$$I_x = \sum m_i y_i^2 \qquad I_y = \sum m_i x_i^2$$

Dik Eksen Teoremi

- Bu eylemsizlik momentlerini toplarsak

$$I_x + I_y = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i r_i^2 = I_z$$

- Elde edilen bu sonuç düzlemsel katı cisimler için **dik eksen teoremidir**. Yani, bir düzlemsel levhanın düzlemine dik bir eksene göre eylemsizlik momenti, düzlem içinde kalan ve birbirine dik iki eksene göre eylemsizlik momentlerinin toplamına eşittir.

Bazı Özel Durumlar

- İnce Halka

Kütlesi M, yarıçapı R olan ve kalınlığı ihmal edilen ince bir halkanın tüm kütle elemanları, merkezinden geçen bir eksene eşit uzaklıktadırlar. Buna göre, bu eksene göre halkanın eylemsizlik momenti MR^2'dir. Bu sonuç ince çeperli bir silindir içinde geçerlidir. Ancak silindir çeperine paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti, parelel eksen teoreminden $I = 2MR^2$'dir. Halkanın düzleminde bulunan bir eksene göre ise eylemsizlik momenti, dik eksen teoreminden $1/2MR^2$'dir.

Bazı Özel Durumlar

- Düzgün İnce Çubuk

Genişliği ve kalınlığı, L uzunluğuna göre ihmal edilen M kütleli düzgün bir çubuk olsun. Eksenden x uzaklığında bulunan Δx uzunluğundaki bir elemanın kütlesi $\Delta m = (\Delta x/L)Mx^2$ olacaktır. Δx yerine sonsuz küçük Δx elemanı alınırsa, elemanlardan gelen katkı integre edilebilir. Böylece düzgün ince bir çubuğun bir ucundaki dik eksene göre eylemsizlik momenti aşağıdaki şekilde bulunur.

$$I = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}ML^2$$

Bazı Özel Durumlar

- Çubuğun merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti ise, parelel eksen teoreminden yararlanılarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$I_c = I - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

KAYNAKLAR

- Bu slaytların hazırlanmasında ‘**MEKANİK BERKELEY FİZİK DERSLERİ CİLT 1**’ kullanılmıştır.