4. HAFTA

BÖLÜM 1 : KATI CİSİMLERİN TEMEL DİNAMİĞİ

SABİT EKSENLER ETRAFINDA DÖNMELER: HAREKETİN ZAMANA BAĞLILIĞI

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ VE ÇARPIMLARI: ANA EKSENLER VE EULER DENKLEMLERİ

EULER DENKLEMLERİNİN UYGULAMALARI

SABİT EKSENLER ETRAFINDA DÖNMELER: HAREKETİN ZAMANA BAĞLILIĞI

- Ani dönme noktası etrafında dönme

Burada merkeze göre simetrik ve dairesel bir cismin, eğik düzlemdeki hareketi incelenecektir. Dönme ekseninin yönü sabit olup, konumu eğik düzlemin altında doğru değişmektedir. Burada cismin hareketindeki ivme, cismin çevresindeki bir P noktası etrafında dönme yaptığı düşünülerek bulunur. O halde, bu P noktasına göre bulunan dönme momentinin eşit açısal momentumun değişme oranına eşit olması gerekecektir.

SABİT EKSENLER ETRAFINDA DÖNMELER: HAREKETİN ZAMANA BAĞLILIĞI

Herhangi bir anda P'nin etrafındaki açısal momentum J_p ve P'deki dönme momenti N_p bulunup hareket denkleminde yerine yazıldığında eğik düzlemdeki yuvarlanma hareketinin öteleme ivmesi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$a = \frac{g sin\theta}{(1 + I/MR^2)}$$

Aynı sonuç enerjinin korunumundan da bulunabilir.

SABİT EKSENLER ETRAFINDA DÖNMELER: HAREKETİN ZAMANA BAĞLILIĞI

- Bileşik Sarkaç

Basit sarkaç, bir düzlemde salınımlar yapan kütlesiz bir ipin ucuna asılmış noktasal bir kütleden oluşmuştur. Bileşik sarkaç ise kütle merkezinden geçmeyen bir eksen etrafında dönme ve salınım hareketi yapan bir katı cisimdir. Bileşik sarkacın hareket denklemi

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/Ml^2}\right)\theta = 0$$

SABİT EKSENLERE GÖRE DÖNME

- Dönme ekseni katı cismin simetrisine bağlı değilse, açısal momentum vektörü $\boldsymbol{J}$ dönme eksenine paralel değildir. $\boldsymbol{J}$ dönme ekseniyle çakışmadığı zaman, $\frac{d\boldsymbol{J}}{dt}$ değişmesi, $\boldsymbol{J}$'nin sabit bir eksen etrafındaki dönmesi şeklinde olmalıdır.

$$\frac{d\boldsymbol{J}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}$$

- $\frac{d\boldsymbol{J}}{dt}$'nin sıfırdan farklı olması bir dönme momentinin varlığını gösterir.

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ VE ÇARPIMLARI: ANA EKSENLER VE EULER DENKLEMLERİ

$$J_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$J_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$J_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

- Eylemsizlik momentlerinin bileşenleri incelendiğinde I_{xx}, I_{yy} ve I_{zz} köşegen elemanları, sırasıyla x, y ve z eksenlerine göre eylemsizlik momentleridir. Köşegen dışı elemanlara ise **eylemsizlik çarpımları** denir ve bular simetrik çiftler olarak bulunur.

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ VE ÇARPIMLARI: ANA EKSENLER VE EULER DENKLEMLERİ

- Uygun bir koordinat sistemi seçilirse, eylemsizlik çarpımları sıfır yapılabilir. Silindir ve dikdörtgen gibi simetrik şekillerde kolayca görülen bu durum, herhangi bir katı cismin merkez olarak seçilen bir noktası için doğrudur. Eylemsizlik çarpımlarının sıfır olduğu koordinat sisteminin eksenlerine katı cismin **ana eksenleri** denir.

$$\boldsymbol{J} = I_{xx}\omega_x\bar{x} + I_{yy}\omega_y\bar{y} + I_{zz}\omega_z\bar{z}$$

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ VE ÇARPIMLARI: ANA EKSENLER VE EULER DENKLEMLERİ

- $\boldsymbol{N}$ dönme momenti ana eksenlere göre tanımlanırsa hareket denklemi

$$\frac{d\boldsymbol{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J} = \boldsymbol{N}$$

- $\boldsymbol{N}$ ana eksen bileşenleri cinsinden yazılırsa

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = N_x$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = N_y$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_t)\omega_x\omega_y = N_z$$

EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ VE ÇARPIMLARI: ANA EKSENLER VE EULER DENKLEMLERİ

- Bu üç denklem takımına **katı cisim hareketinin Euler denklemleri** denir.

- Kinetik enerji, ana eksenlere göre eylemsizlik momentleri ve açısal hız bileşenleri cinsinden

$$K = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right)$$

EULER DENKLEMLERİNİN UYGULAMALARI

- M kütleli a yarıçaplı bir dairesel disk ve kütlesiz bir saptan oluşan basit bir topaç olsun. S açısal hız, $\dot{\phi}$ presesyon açısal hızı olmak üzere basit diskten farklı özelliklere sahip topaç ve jiroskop için genel denklem

$$\dot{\phi} = \frac{Mgl}{I_z S}$$

EULER DENKLEMLERİNİN UYGULAMALARI

- Eğer S çok büyük olursa, dönen topacın açısal momentumu aşağıda gibidir.

$$\boldsymbol{J} = I_z S \bar{\boldsymbol{z}}$$

KAYNAKLAR

- Bu slaytların hazırlanmasında ‘**MEKANİK BERKELEY FİZİK DERSLERİ CİLT 1**’ kullanılmıştır.