

KONU 8: AĞ (ŞEBEKE) ANALİZLERİ - II

Minimum Kapsayan Ağaç Algoritması

Amaç, her bir olay veya nokta çiftleri arasında en kısa yolu bularak şebeke içinde toplam en kısa uzaklığı sağlayan yolu bulmaktır. Algoritma, doğrudan veya dolaylı olarak dalların en kısa bağlantısını kullanarak, şebekenin dallarının birbiri ile ilişkilendirilmesini ele alır. Örneğin, iki şehir arasındaki bir veya daha fazla kasabayı birbirine bağlayan tali yolların yapımının gerçekleştirilmesi.

• Matematiksel Model

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_i \sum_j d_{ij} X_{ij} \\ \sum_j X_{ij} &\geq 1 \quad (\text{Her düğümüne en az bir düğümden gelinir.}) \\ \sum_i X_{ij} &\geq 1 \quad (\text{Her düğümden en az bir düğüme geçilir.}) \\ X_{ij} &= \{0,1\}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,n, \quad i \neq j \end{aligned}$$

• Örten Ağaç Algoritması

$N = \{1,2,\dots,n\}$ düğümler kümesi olmak üzere, C_k , algoritmanın k . yinelenmesinde kalıcı olarak bağlanmış düğümler kümesi ve \bar{C}_k , henüz kalıcı olarak bağlanmamış düğümler kümesi olarak tanımlansın.

Adım 0: $C_0 = \emptyset$ ve $\bar{C}_0 = N$ olarak alınır.

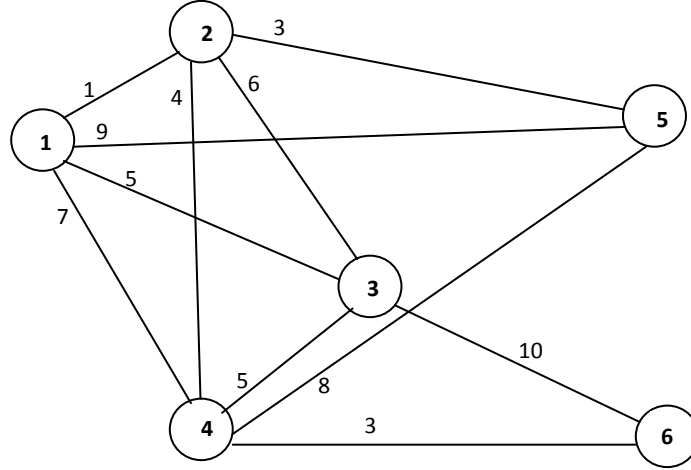
Adım 1: Bağlanmamış düğümler kümesi \bar{C}_0 daki herhangi bir i düğümü ile başlanır. $C_1 = \{i\}$ olarak belirlenir. Bu durumda, $\bar{C}_1 = N - \{i\}$ olacaktır. $k=2$ alınır ve k . yinelemeye geçilir.

k. Adım: (Genel adım) Bağlanmış düğümler kümesi C_{k-1} 'deki bir düğüme en kısa bağlantıyı verecek biçimde \bar{C}_{k-1} bağlanmamış düğümler kümesinden bir j^* düğümü seçilir. Bu düğüm, C_{k-1} 'e kalıcı olarak bağlanır ve \bar{C}_{k-1} kümesinden çıkarılır.

$$\begin{aligned} C_k &= C_{k-1} + \{j^*\} \\ \bar{C}_k &= \bar{C}_{k-1} - \{j^*\} \end{aligned}$$

Bağlanmamış düğümler kümesi $\bar{C}_{k-1} = \emptyset$ ise durulur. Aksi halde, $k = k+1$ olarak belirlenir ve yineleme tekrarlanır.

Örnek 8.1: Bir kablolu TV firması, 6 yeni yerleşim bölgesine kablolu yayın hizmeti sağlama düşüncesindedir. Aşağıdaki şekilde, 6 bölge arasındaki potansiyel kablolu yayın bağlantıları gösterilmektedir. Kablo uzunlukları her bir dal için km biriminden gösterilmiştir. Buna göre en ekonomik kablo ağını belirleyiniz.

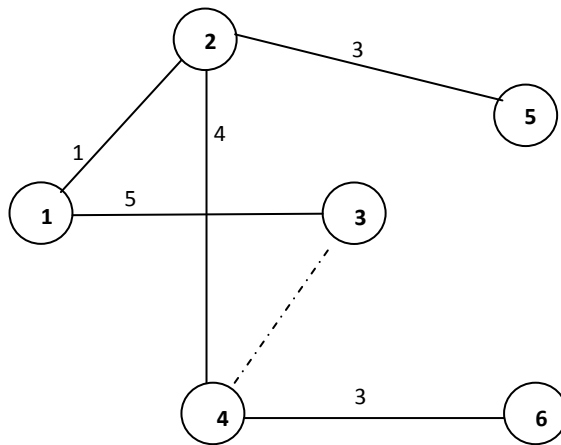


Çözüm:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Bağlantı yapılmış düğümler kümesi	Erişilebilir düğüm ve ayrıt uzunluğu	Örten ağca alınan ayrıt
$C_1 = \{1\}$ $\bar{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$	$(1-2) - 1^*$ $(1-3) - 5$ $(1-4) - 7$ $(1-5) - 9$	$(1-2)$ min $j^* = 2$
$C_2 = \{1, 2\}$ $\bar{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$	$(1-3) - 5$ $(1-4) - 7$ $(1-5) - 9$ $(2-3) - 6$ $(2-4) - 4$ $(2-5) - 3^*$	$(2-5)$ min $j^* = 5$
$C_3 = \{1, 2, 5\}$ $\bar{C}_3 = \{3, 4, 6\}$	$(1-3) - 5$ $(1-4) - 7$ $(2-4) - 4^*$ $(2-3) - 6$ $(5-4) - 8$	$(2-4)$ min $j^* = 4$
$C_4 = \{1, 2, 5, 4\}$ $\bar{C}_4 = \{3, 6\}$	$(1-3) - 5$ $(2-3) - 6$ $(4-3) - 5$ $(4-6) - 3^*$	$(4-6)$ min $j^* = 6$

Bağlantı yapılmış düğümler kümesi	Erişilebilir düğüm ve ayrıt uzunluğu	Örten ağaca alınan ayrıt
$C_5 = \{1,2,5,4,6\}$ $\bar{C}_5 = \{3\}$	$(1-3) - 5^*$ $(2-3) - 6$ $(4-3) - 5^*$ $(6-3) - 10$	$(1-3)$ veya $(4-3)$ min $j^* = 3$
$C_6 = \{1,2,5,4,6,3\}$ $\bar{C}_6 = \emptyset$	-	-



$$\mathbf{X}^* = [X_{12} \ X_{13} \ X_{14} \ X_{15} \ X_{23} \ X_{24} \ X_{25} \ X_{34} \ X_{36} \ X_{45} \ X_{46}]$$

$$= [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$Z^* = 1+3+5+4+3 = 16 \text{ km}$$