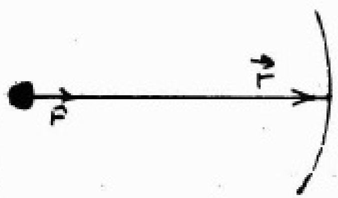
MERKEZİL YÖRÜNGE

3.1 Genel özellikler.

Birinin diğeri üzerindeki çekim tesiri ihmal edilebilen iki cisim alalım. Bu durumda küçük cismin büyüğü etrafında çizeceği yörüngeye 'merkezil yörünge' denir. Merkezdeki büyük cisimden küçük cisme giden doğrultudaki birim vektör $\hat{r}$ ve büyük cismin, kütlesi birim kabul edilen küçük cisim üzerindeki çekim tesiri f ise; ki bu , küçük cismin bulunduğu yere, hızına ve zamana bağlı bir fonksiyondur, yani $f = (\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ dır, küçük cismin hareketini meydana getiren kuvvet vektörel notasyonla $\vec{F} = - f\, \hat{r}$ olacaktır. – işareti kuvvetin çekici olduğunu göstermek için konulmuştur. Bu durumda küçük cismin hareket denklemi, Newton'un ikinci kanununu kullanarak

$$\ddot{\vec{r}} = - f\, \hat{r} \qquad (1)$$

olur.



Bu denklemin çözümüne başlamadan önce, hareketin bazı özelliklerini elde edeceğiz:

(1) denkleminin her iki tarafını $\vec{r}$ ile vektörel olarak çarpalım.

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = - f\, \vec{r} \times \hat{r}$$

$h^2 = \mu a\,(1 - e^2)$ de koyarak $(\frac{1}{2})^2 = 1 \cdot \dfrac{4}{7}\,(1 - e^2)$

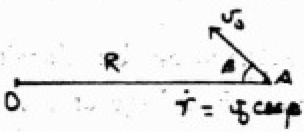
buradan $e = \frac{3}{4}$ elde edilir.

4. $\dfrac{\mu}{r^2}$ kuvvet alanındaki bir cisim merkezden R kadar uzaklıktan β açısı altında ve υ_o hızıyla atılıyor. Hareketin

$$\dot r^2 = \upsilon_o^2 - \frac{2\mu}{R} + \frac{2\mu}{r} - \frac{R^2\,\upsilon_o^2 \sin^2\beta}{r^2}$$ ile verildiğini gösteriniz.

Çözüm:

Alanın potansiyeli $V = \int f\,dr = \dfrac{\mu}{r^2}\,dr = -\dfrac{\mu}{r}$



Kutupsal koordinatlarda hız $\vec{\upsilon} = \dot r\,\hat{i} + r\dot\Theta\,\hat{j}$ kare alarak

$\upsilon^2 = \dot r^2 + r^2\dot\Theta^2 \quad r^2\dot\Theta = h$ tan $r^2\dot\Theta^2 = \dfrac{h^2}{r^2}$ dolayısiyle $\upsilon^2 = \dot r^2 + \dfrac{h^2}{r^2}$

$\frac{1}{2}\,\upsilon^2 + V = E$ enerji entegralinde yerlerine koyarak

$$\frac{1}{2}\left(\dot r^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r} = E$$

E yı bulmak için ilk şartları kullanacağız.

υ_o ın radyal bileşeni $\dot r = \upsilon_o \cos\beta$ ve A da $r = R$

$E = \frac{1}{2}\left(\upsilon_o^2 \cos^2\beta + \dfrac{h^2}{R^2}\right) - \dfrac{\mu}{R}$ Bu değeri yukarıda yerine koyarak

$$\frac{1}{2}\left(\dot r^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_o^2 \cos^2\beta + \frac{h^2}{R^2}\right) - \frac{\mu}{R}$$

A noktasında $h = R\,\upsilon_o \sin\beta$

$$\tfrac{1}{2}\left(\dot r^2 + \frac{R^2 \upsilon_o^2 \sin^2\beta}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r} = \tfrac{1}{2}\left(\upsilon_o^2 \cos^2\beta + \frac{R^2 \upsilon_o^2 \sin^2\beta}{R^2}\right) - \frac{\mu}{R}$$

Buradan $\dot r^2 = \upsilon_o^2 - \dfrac{2\mu}{R} + \dfrac{2\mu}{r} - \dfrac{R^2 \upsilon_o^2 \sin^2\beta}{r^2}$ elde edilir.

Çöz 5. Bir cisim F_2 odak doğrultusundaki bir kuvvet tesiri altında eksantrisitesi e olan bir elips çizmektedir. Cisim ~~perihelde~~ enberide iken kuvvet diğer odağa transfer edilmektedir. Yeni yörüngenin eksantrisitesinin

$$e' = \frac{e\,(3+e)}{1-e} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Çözüm: $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = \dfrac{a(1-e)\cancel{(1+e)}}{\cancel{(1+e)}} = a(1-e)$

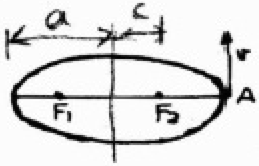
A noktasında $r = a(1-e)$ olduğundan

açısal momentum $h = \upsilon a(1-e) = v.r$'dir.

$$p = \frac{h^2}{\mu} \text{ den } \frac{p}{r} = \frac{h^2}{\mu r} = \frac{\upsilon^2 a^2 (1-e)^2}{\mu a (1-e)} = \frac{\upsilon^2 a (1-e)}{\mu}$$

yörünge denklemi $\dfrac{p}{r} = 1 + e\cos\Theta$ yı A için yazarsak

$\dfrac{p}{r}$ yerine yukarıki değeri, Θ yerine sıfır koyarız.



$$\frac{\upsilon^2 a (1-e)}{\mu} = 1 + e \rightarrow \upsilon^2 = \frac{\mu}{a}\,\frac{1+e}{1-e}$$

ağına göre yeni harekette r, $r' = a(1+e)$ haline geliyor. $h' = \upsilon a(1+e) =$

$\dfrac{p'}{r'} = \dfrac{\upsilon^2\, a\,(1+e)}{\mu}$ ve yeni yörünge denklemi $\dfrac{p'}{r'} = 1 + e'\cos\Theta$ dır.

Yeni yörünge için A da $\Theta = 0$ ve $\frac{p'}{r'}$ nin değerini koyarak

$v^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$ yazarsak

$$\frac{v^2 a\,(1+e)}{\mu} = 1 + e' \rightarrow \frac{\cancel{\frac{\mu}{a}}\,\frac{1+e}{1-e}}{\cancel{\mu}}\,\cancel{a}\,(1+e) = 1 + e' \rightarrow$$

$$e' = \frac{e\,(3+e)}{1-e} \quad \text{elde edilir.}$$

$$e' = \frac{(1+e)^2}{1-e} - 1$$

$$e' = \frac{(1+e)^2 - (1-e)}{1-e} = \frac{\cancel{1} + 2e + e^2 \cancel{-1} + e}{1-e}$$

$$e' = \frac{3e+e^2}{1-e} = \frac{e\,(3+e)}{1-e}$$

$\boxed{e > 0.236\text{'dan sonra } e' \geq 1 \text{ oluyor (yani yörünge açılıyor)}}$

$$1 = \frac{e\,(3+e)}{1-e} \Rightarrow 1-e = 3e+e^2$$

$e^2+4e-1=0$ çözersek.

$\boxed{e_1 > 0.236}$ bulunuyor

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 \quad \text{integre ederek}$$

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

Burada $\vec{h}$ sabit bir vektördür. $\dot{\vec{r}} = \vec{\upsilon}$ (küçük cismin hızı) koyalım

$$\vec{r} \times \vec{\upsilon} = \vec{h} \tag{2}$$

elde ederiz. O halde, küçük cismin hareketi esnasında açısal momentum sabit kalmaktadır.

Şimdi de (2) denkleminin her iki tarafını $\vec{r}$ ile skaler olarak çarpalım

$$\vec{r} \,.\, (\vec{r} \times \vec{\upsilon}) = \vec{r} \,.\, \vec{h} \quad \text{sol taraf sıfır olduğundan}$$

$$\vec{r} \,.\, \vec{h} = 0 \tag{3}$$

elde ederiz. (3) denklemi sabit $\vec{h}$ vektörüne dik olan $\vec{r}$ vektörlerinin meydana getirdiği, merkezdeki büyük cisimden geçen bir düzlemin denklemidir. O halde, küçük cismin hareketi, merkezdeki büyük cisimden geçen bir düzlem üzerinde olmaktadır.

Biz burada f yi sadece küçük cismin bulunduğu yere bağlı bir fonksiyon olarak kabul edecek ve sadece konservatif alanları göz önüne alacağız. Bu duruma göre, $f = f(\vec{r})$ ve $\vec{F} = -\nabla V$ yazabiliriz. Burada $V = V(\vec{r})$ potansiyel fonksiyonudur.

Diğer taraftan $\vec{F}$ nin radyal bileşeni $f(\vec{r})$ ve teğetsel bileşeni sıfırdır. 1.15.2 den dolayı

$$\frac{\partial V}{\partial r} = f(\vec{r}) \quad \text{ve} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \Theta} = O \quad \text{yazabiliriz.}$$

İkinci denklem gösteriyorki V, dolayısıyla da f yalnız r nin fonksiyonudur. O halde, $f(\vec{r})$ yerine $f(r)$ ve $\frac{\partial V}{\partial r}$ yerine $\frac{dV}{dr}$ yazabiliriz. dolayısıyla

$$\frac{dV}{dr} = f(r) \quad \text{integre ederek}$$

$$V(r) = \int f(r)\, dr \tag{4}$$

elde ederiz. Bu şartlar altında küçük cismin hareket denklemi

$$\ddot{\vec{r}} = - f(r)\, \hat{r} \qquad (5)$$

şekline girer.

(5) diferansiyel denklemini çözmek için kutupsal koordinatlar kullanacağız. Radyal ivme $\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2$ ve teğetsel ivme $r\ddot{\Theta} + 2\dot{r}\dot{\Theta}$ nin birim kütle ile (m = 1) çarpımı küçük cisme bu doğrultularda etki eden kuvveti vereceğinden ve küçük cisme sadece radyal doğrultuda kuvvet etki ettiğinden

$$\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2 = - f(r) \qquad (6)$$

$$r\ddot{\Theta} + 2\dot{r}\dot{\Theta} = 0 \rightarrow \frac{d\theta}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt} + 2\dot{r}\right) = 0 \qquad (7)$$

Bu sistemin ikincisini hemen integre edebiliriz:

$$r^2\dot{\Theta} = h \text{ (açısal mom.)} \qquad (8)$$

Burada h integrasyon sabitidir. (8) ifadesi bilindiği gibi Kepler'in ikinci kanununun matematiksel ifadesidir. Diğer taraftan açısal momentumun sabit oluşundan

$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{\upsilon} = r \times (\dot{r}\hat{i} + r\dot{\Theta}\hat{j})$ $\vec{r}$ ve $\hat{i}$ aynı doğrultuda olduğundan

$\vec{h} = r\dot{\Theta}\vec{r} \times \hat{j}$ olur. Mutlak değer alarak

$h = r^2\dot{\Theta}$ elde ederiz. O halde. Keplerin ikinci kanunu ile açısal momentumun sabit oluşu aynı şeydir.

Şimdi sistemin birinci denkleminin yâni (6) nın integrasyonuna geçeceğiz:

$\frac{1}{r} = u$ değişken değiştirmesini yapalım.

$$\frac{du}{d\Theta} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\Theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\Theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\Theta} = -\frac{\dot{r}}{h}$$

Benzer şekilde $\frac{d^2u}{d\Theta^2} = -\frac{1}{h^2u^2}\ddot{r}$ buradan $\ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\Theta^2}$

Diğer taraftan $r\dot{\Theta}^2 = h^2u^3$ tür. bunları (6) da yerlerin koyarsak

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = \frac{1}{h^2u^2} \; f\left(\frac{1}{u}\right) \tag{9}$$

elde ederiz. Bu differansiyel denklemin çözülebilmesi için f kuvvet fonksiyonunun bilinmesi gerekir.

3. 2 Newton çekim alanındaki merkezil hareket.

Şimdi merkezdeki çismin kütlesinin M olduğunu ve bu cismin, hareketini incelemekte olduğumuz birim kütleyi Newton Genel Çekim Kanununa göre çektiğini kabul edelim. Bu çekim alanının konservatif olduğunu biliyoruz. O zaman $GM = \mu$ dersek $f = \frac{\mu}{r^2}$ olacaktır. (9) denkleminde yerine koyarsak

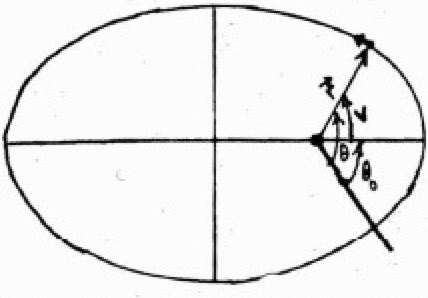
$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad \text{elde ederiz.}$$

Bu denklemin çözümü $u = \frac{\mu}{h^2} + A \cos(\Theta - \Theta_o)$ dir. Buradaki A ve Θ_o integrasyon sabitleridir. $u = \frac{1}{r}$ koyulursa

$$r = \frac{h^2 | \mu}{1 + (Ah^2/\mu) \cos(\Theta - \Theta_o)}$$

$\frac{h^2}{\mu} = p$ ve $\frac{Ah^2}{\mu} = e$ diyelim

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\Theta - \Theta_o)}$$



elde ederiz. Bu ise bir konik denklemidir. O halde küçük cisim, hareketi esnasında bir konik çizmektedir.

e dışmerkezliği yörüngenin tipini tayin eder:

$e = 0$ ise yörünge daire,

$e < 1$ ise yörünge elips,

$e = 1$ ise yörünge parabol,

$e > 1$ ise yörünge hiperbol'dır.

Genellikle Θ açısı gerçek anomali olarak alınır. Bu durumda $\Theta = v$ ve $\Theta_o = 0$ olur, ve yörünge denklemimiz de

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \tag{10}$$

standard şeklini alır.

Merkezil harekette çekim kuvvetinin şekli ne olursa olsun açısal momentumun sabit kaldığını, yani Keplerin ikinci kanununun sağlandığını; Newton çekimi altında ise küçük cismin hareketi esnasında bir konik çizdiğini, yani Kepler'in birinci kanununun sağlandığını böylece göstermiş olduk. Şimdi bu ikinci halde Kepler'in üçüncü kanununun da sağlandığını gösterelim:.

$$h^2 = \mu p = \mu a (1 - e^2) \qquad \text{ve } h = r^2 \dot{v} \qquad \text{dan}$$

$$\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} r^2 \, dv = \tfrac{1}{2} \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \int_0^{P} dt$$

$$\pi ab = \tfrac{1}{2} \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad P$$

Buradan da $P = 2\pi \sqrt{\dfrac{a^3}{\mu}}$ elde edilir. $n = \dfrac{2\pi}{P}$

olduğundan $n^2 a^3 = \mu$ elde edilir ki bu da Kepler'in üçüncü kanununun düzeltilmiş şeklidir.

Şimdi küçük cisim yörüngesi üzerinde hareket ederken herhangi bir durumdaki hızını veren bağıntıları çıkaracağız:

(10) denkleminin zamana göre türevini alalım.

$$\dot{r} = \frac{p}{(1 + e\cos v)^2} \, e \sin v \, \dot{v} = \frac{e}{p} \sin v \, r^2 \dot{v} = \frac{eh}{p} \sin v = \frac{e\mu}{h} \sin v$$

Diğer taraftan $r\dot{v} = \dfrac{h}{r} = \dfrac{\mu}{h} (1 + e\cos v)$ dir.

$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{i} + r\dot{v}\hat{j}$ den kare alarak

$\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2$ yukarıdaki bağıntıları bu hız bağıntısında yerlerine koyar ve kısaltırsak

$$\upsilon^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right) \tag{11}$$

elde deriz.

1° Elips halinde $p = a\,(1-e^2)$, dolayısıyla $\upsilon_e^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$

2° Parabol halinde $e = 1$ dolayısıyla $\upsilon_p^2 = \frac{2\mu}{r}$

3° Hiperbol halinde $p = a\,(e^2-1)$ dolayısıyla $\upsilon_h^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$

4° Daire halinde $e = o$, $p = r = a$ dolayısıyla $\upsilon_d^2 = \frac{\mu}{a}$

Buluruz. Dikkat edilirse parabolik hız, daha evvelce görmüş olduğumuz kurtulma hızı' na eşit olup eliptik hızdan daha büyük, hiperbolik hızdan ise daha küçüktür.

Şimdi de cismin hareketi esnasında haiz olduğu toplam enerjiyi hesap edelim. Newton çekim alanı konservatif bir alan olduğundan, cisim yörüngenin neresinde olursa olsun kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisinin toplamı sabit olacaktır. Bunu kolayca aşağıdaki gibi de gösterebiliriz:

(5) denkleminde $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{\upsilon}}, f = \frac{\mu}{r^2}$ ve $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ koyalım $\dot{\vec{\upsilon}} = -\frac{\mu}{r^3}\,\vec{r}$

elde ederiz. Bunu $\vec{\upsilon}$ ile skaler olarak çarpalım $\vec{\upsilon}\,.\,\dot{\vec{\upsilon}} = -\frac{\mu}{r^3}\,\vec{r}\,.\,\vec{\upsilon}$ olur.

$\vec{r} = r\,\hat{i}$ ve $\vec{\upsilon} = \dot{r}\,\hat{i} + r\dot{v}\,\hat{j}$ koyalım $\vec{\upsilon}\,.\,\dot{\vec{\upsilon}} = -\frac{\mu}{r^2}$ bulunur. Bu da aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\,\upsilon^2\right) = \mu\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{integre ederek}$$

$\frac{1}{2}\,\upsilon^2 - \frac{\mu}{r} = E$ elde ederiz . Burada E toplam enerjiyi gösteren bir sabittir. Bu enerji denkleminde çeşitli yörünge hallerine tekabül eden υ^2 değerleri yerine koyulursa, Elips halinde toplam enerji $\boxed{E = -\frac{\mu}{2a}}$, Parabol halinde $\boxed{E = O}$, Hiperbol halinde $\boxed{E = \frac{\mu}{2a}}$ ve daire halinde $\boxed{E = -\frac{\mu}{2a}}$ elde edilir. Toplam enerjinin eksi oluşu, cismin potansiyel enerjisinin kinetik enerjisinden daha büyük olduğunu gösterdiğinden o cismi sonsuza götürmek için ona enerji vermeliyiz anlamında alınmalıdır.

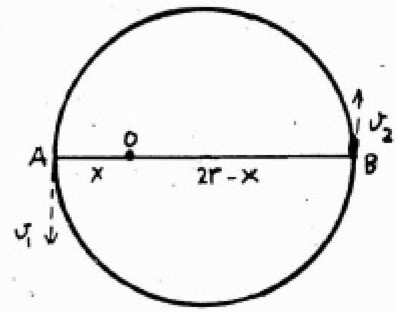
3.3 Problemler.

1. Bir partikül r yarı çaplı bir çenber üzerinde hareket etmekte, hareketi meydana getiren kuvvet daire içinde sabit bir noktadan geçmektedir. En büyük hız υ_1, en küçük hız da υ_2 ise gösteriniz ki period

$$P = \frac{\pi r (\upsilon_1 + \upsilon_2)}{\upsilon_1 \upsilon_2} \quad \text{dir.}$$

Çözüm: O noktası sabit kuvvet merkezi olsun. O dan geçen çap AB ise en büyük hız A da ve en küçük hız B de olacaktır. A daki açısal momentum $h = x\,\upsilon_1$ B deki $h = (2r - x)\,\upsilon_2$ dir. Harekette açısal momentum sabit olduğundan

$$h = x\,\upsilon_1 = (2r - x)\,\upsilon_2 \text{ olur.}$$



Bunu iki denklem halinde yazıp x'i elimine edersek

$$\left.\begin{aligned} h &= x\upsilon_1 \\ x\upsilon_1 &= (2r - x)\,\upsilon_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{den}$$

$$h = 2r \frac{\upsilon_1 \upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} \quad \text{elde ederiz.}$$

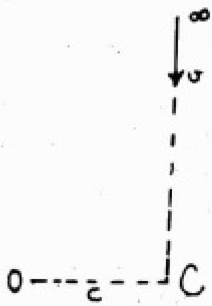
Diğer taraftan, Alan hızı x Period = Dairenin alanı

$$\frac{1}{2} h \,.\, P = \pi r^2$$

$$r \frac{\upsilon_1 \upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} \,.\, P = \pi r^2$$

Buradan $P = \dfrac{\pi r(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{\upsilon_1 \upsilon_2}$ elde edilir.

2. $\dfrac{\mu}{r^2}$ merkezil kuvveti altında hareket eden bir cisim sonsuzdan υ hızıyla atılıyor. Şayet cisme hiç bir kuvvet tesir etmeseydi kuvvet merkezine c kadar uzaktan geçecekti. Yörüngenin denklemini μ, c ve υ cinsinden bulunuz.



Çözüm:

Yörüngenin bir kolu sonsuzda olduğuna göre elips olamaz. Parabol de olamaz Çünkü bu halde $\upsilon^2 = \dfrac{2\mu}{r}$ den gözüküyorki sonsuzda hız sıfırdır. Sonsuzda belirli bir hız olma hali ancak hiperbol halinde sağlanır. Zira $\upsilon^2 = \mu \left(\dfrac{2}{r} + \dfrac{1}{a}\right)$ da $r \to \infty$ olursa υ sonlu değer alır. O halde yörünge bir hiperbol olacaktır. $r \to \infty$ için $\upsilon^2 = \dfrac{\mu}{a}$ dan $a = \dfrac{\mu}{\upsilon^2}$ dir. Diğer taraftan, cisme hiç bir kuvvet tesir etmeseydi, yörünge bir doğru olacak ve C deki açısal momentum $h = c\upsilon$ olacaktı. Doğrusal harekette υ sabitse açısal momentum da sabittir. O halde cismin atıldığı andaki açısal momentumu da $h = c\upsilon$ dir. Halbuki bu nokta hiperbole ait bir noktadır. O halde $h = c\upsilon$ hiperbolik hareketin de açısal momentumudur a ve h'ın bu değerlerini

$$p = a\,(e^2 - 1) = \frac{h^2}{\mu}$$ de yerlerine koyup e yi

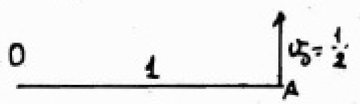
bulursak $$e = \left(1 + \frac{c^2\,\upsilon^4}{\mu^2}\right)^{1/2}$$

Hiperbolün denklemi $\frac{p}{r} = 1 + e \cos \Theta$ da yerilerine koyarsak

$$\frac{c^2\,\upsilon^2 / \mu}{r} = 1 + \left(1 + \frac{c^2\,\upsilon^4}{\mu^2}\right)^{1/2} \cos \Theta$$ bura-

dan $\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2\,\upsilon^2} + \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\mu^2}{c^2\,\upsilon^4}\right)^{1/2} \cos \Theta$ aranılan yö-rünge denklemidir.

3. $\frac{1}{r^2}$ kuvvetinin tesiri altındaki bir cisim kuvvet merkezinden birim uzaklıktaki bir A oktasından dik olarak $\upsilon_o = \frac{1}{2}$ hızıyla atılıyor. Yörüngenin dışmerkezliğinin $\frac{3}{4}$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm:

Alanın potansiyeli $V = \int f\, dr = \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}$

Enerji entegrali $E = \frac{1}{2}\,\upsilon^2 - \frac{1}{r}$ nın A daki değeri

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{1} = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8} < 0$$

O halde, yörünge elipstir.

$$\upsilon^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \text{ dan } \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1\left(\frac{2}{1} - \frac{1}{a}\right) \rightarrow$$

$$a = \frac{4}{7}$$

A da açısal momentum $h = r\,\upsilon_o = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$