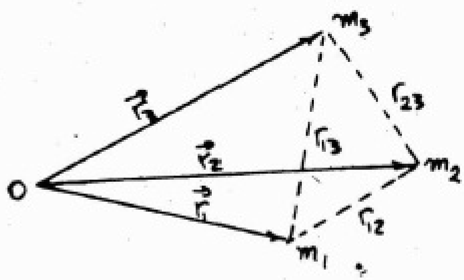
BÖLÜM 5

ÜÇ CİSİM PROBLEMİ

5.1 Genel Üç Cisim Problemi.

İki cisim probleminde kütleleri birbirine göre ihmal edilemiyen iki cisim alınır ve kendi karşılıklı çekimleri altında bu iki cismin hareketi incelenir. Newton kanunlarının geçerli olabilmesi için de cisimlerin küresel simetrik oldukları kabul edilir. Üç cisim probleminde ise yukardaki şartları haiz üç cisim alınır ve kendi karşılıklı çekimleri altında bu üç cismin hareketi incelenir. Adı geçen üç cismin kütleleri m_1 m_2 ve m_3 olsun. O merkezli herhangi bir koordinat sistemi alalım. m_1 m_2 ve m_3'ün O ya göre hareket denklemlerini çıkaracağız. Newton genel çekim kanununa göre aralarındaki uzaklık r ve kütleleri m_1 ve m_2 olan iki cisim, birbirini $F = G \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ kuvvetiyle çeker. Bu duruma göre m_2 nin m_1 üzerindeki çekimi, vektörel notasyonla.



$$\vec{F}m_1m_2 = -G \frac{m_1m_2}{r^2_{12}} \hat{r}_{12} = -G \frac{m_1m_2}{r^2_{12}} \quad \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -G \frac{m_1m_2}{r^3_{12}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

olur. Burada G Genel çekim sabitidir. Aynı şekilde m_3 ün m_1 üzerindeki çekimi $\vec{F}m_1m_3 = -G \dfrac{m_1m_3}{r^3_{13}} \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$ olacaktır. O halde m_1 üzerine tesir eden toplam çekim kuvveti

$$\vec{F}m_1 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3_{12}} \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - G \quad \frac{m_1 m_3}{r^3_{13}} \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \text{ tür.}$$

Benzer şekilde m_2 ve m_3'e tesir eden toplam çekim kuvvetleri

$$\vec{F}m_2 = -G\frac{m_2 m_3}{r^3_{23}} \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) - G \quad \frac{m_2 m_1}{r^3_{21}} \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\vec{F}m_3 = -G\frac{m_3 m_1}{r^3_{31}} \quad (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - G \quad \frac{m_3 m_2}{r^3_{32}} \quad (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)$$

olacaktır.

Dolayısiyla, m_1 m_2 ve m_3'ün O ya göre hareket denklemleri, Newton'un ikinci kanununu tatbik ederek

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3_{12}} \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - G \quad \frac{m_1 m_3}{r^3_{13}} \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_2 m_3}{r^3_{23}} \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) - G \quad \frac{m_2 m_1}{r^3_{21}} \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (2)$$

$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = -G \frac{m_3 m_1}{r^3_{31}} \quad (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - G \quad \frac{m_3 m_2}{r^3_{32}} \quad (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \quad (3)$$

olarak elde edilirler. Burada . zamana göre türevi göstermekte olup $\ddot{\vec{r}}_i$, m_i lerin haraketlerinin O ya göre ivmeleridirler. Bu denklemler üç cisim probleminin genel hareket denklemleridir. Açıkça görülür ki eğer üçüncü cisim mevcut değilse $m_3 = O$ ve dolayısiyle

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3_{12}} \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_2 m_1}{r^3_{21}} \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

elde edilir. Bunlar da bilindiği gibi iki cisim probleminin hareket denklemleridir.

(1) + (2) + (3) teşkil edildiğinde görülür ki $\sum\limits_{i=1}^{3} m_i \ddot{\vec{r}}_i = O$ dir.

Bunu iki defa integre ederek

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i = \vec{a}\ t + \vec{b} \qquad (4)$$ elde ederiz. Burada

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ integrasyon sabitleridir. Bu bağıntı kütle merkezinin sabit bir hızla doğrusal bir hareket yaptığını gösterir.

Şimdi de m_i lerin hareketinde açısal momentumun sabit olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{h} \quad \text{olmalıdır.} \quad (5) \qquad \text{Burada } \vec{h} \text{ sabittir.}$$

Türev alalım.

$$\sum_{i=1}^{3} \dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \text{ olur.}$$

Vektörel çarpım tarifinden dolayı ilk terim sıfırdır. İkinci terimin sıfır olduğu da $\vec{r}_1 \times (1) + \vec{r}_2 \times (2) + \vec{r}_3 \times (3)$ teşkil edilerek gösterilir.

m_1 m_2 ve m_3 cisimlerinin meydana getirdiği kuvvet alanının potansiyeli

$$V = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right) \text{ dir.}$$

Bunun yardımıyla (1), (2) ve (3) denklemleri

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \quad (i = 1,2,3) \text{ şekline girer.} \qquad (6)$$

Şimdi de bu sistem için enerjinin korunumunu göstereceğiz. bunun

için $$\sum_{i=1}^{3} \tfrac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + V = \text{sabit} \qquad (7)$$

olmalıdır. Bu da $\sum_{i=1}^{3} \dot{\vec{r}}_i$. (6) teşkil edilerek ve sonra da integre edilerek gösterilir.

(1), (2) ve (3) denklemleri veya aynı şey olan (6) denklemleri 18 inci mertebeden diferansiyel denklem sistemleridir. Eğer sistemin bir integrali biliniyorsa onun yardımıyla mertebe bir düşürülebilir. Üç cisim probleminde (4) ü sıfıra eşitliyerek, yani koordinat merkezini kütle merkezine kaydırarak, 6 integral elde ederiz. Bunlar $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin xyz dik koordinat sistemindeki bileşenleridir. Açısal momentumun sabit oluşu ise bize 3 integral verir. Bunlar da $\vec{h}$ ın koordinatlarıdır. Diğer taraftan, enerji denklemi de bize bir integral temin eder. Bunlar yardımıyla sistemin mertebesi 18 den 8 e indirilir. Son olarak zamanın ve düğüm noktasının eliminasyonu ile mertebe 6'ya indirilebilir.

5.2 Şartlı (Kısıtlı) Üç Cisim Problemi.

m_3 ün m_1 ve m_2 ye göre çok küçük olduğunu ve bunlar üzerine hiç veya ihmal edilebilecek kadar az tesir ettiğini kabul edelim. Bu durumda m_3 ün hareketini inceliyeceğiz.

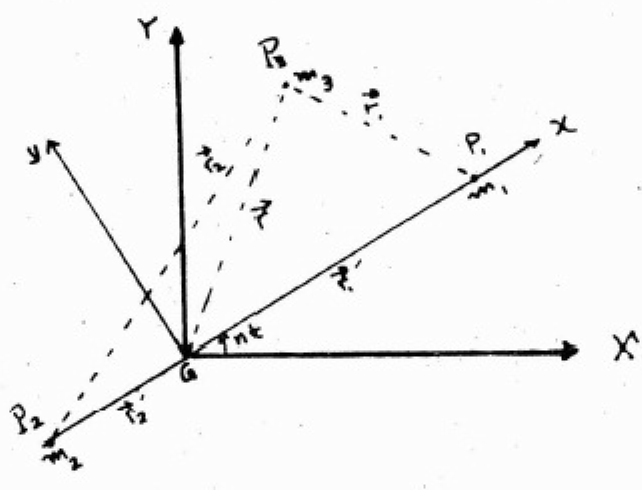
m_1 ve m_2 kütle merkezi etrafında daire çiziyorlarsa ve m_3 bu daire düzlemi içinde hareket ediyorsa m_3 ün hareket denklemini elde edeceğiz. m_1 ve m_2 nin kütle merkezini koordinat merkezi olarak alalım. Bu merkezli sabit bir dik koordinat sistemi XY olsun. m_3 ün hareket denklemi (3) de

$\vec{r}_3 = \vec{r}$, $\quad \vec{r}_1 = \vec{r}'_1$, $\quad \vec{r}_2 = \vec{r}'_2$, $\quad r_{31} = r_1$, $\quad r_{32} = r_2$ koyarak elde edilir. Dolayısiyle

$$\ddot{\vec{r}} = -Gm_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}'_1}{r^3_1} - Gm_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}'_2}{r^3_2} \quad \text{dir.} \tag{8}$$

$V = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$ koyarsak denklemimiz

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \quad \text{olur.} \tag{9}$$



Şayet r nin sabit sistemdeki koordinatları XY ise, yukarıki denklem

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial X}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial Y} \qquad (10)$$

haline gelir. Burada $F = - V$ olup Poincare' kuvvet fonksiyonudur.

Şimdi x ekseni $m_2 m_1$ doğrultusuyla çakışan, aynı merkezli ve üniform olarak dönen, xy Karteziyen dik koordinat sistemini alalım. m_1 ve m_2 kütle merkezi etrafında birer çenber çizmektedirler ve m_1, m_2 bu çenberler üzerinde sabit bir açısal hızla dönmektedirler. Bu açısal hız n ise, xy sistemi XY sistemine göre n açısal hızı ile dönecektir. İki sistem arasındaki açı bir t anı için nt olduğundan XY den xy ye geçiren transformasyon formülleri

$$X = x\cos nt - y\sin nt$$
$$Y = x\sin nt + y\cos nt$$

dir. Bunlardan $X + iY = (\cos nt + i\sin nt)\,(x + iy)$ elde edilir. Burada $i = \sqrt{-1}$ dir. Şimdi $X + iY = Z$ ve $x + iy = z$ dersek $Z = e^{int} z$ (11) buluruz. (10) dan

$$\frac{d^2X}{dt^2} + i\,\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial X} + i\,\frac{\partial F}{\partial Y}$$ dır $\frac{\partial F}{\partial X} = F_X'$ ve $\frac{\partial F}{\partial Y} = F_Y$

olmak üzere buradan

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = F_X' + i\,F_Y \qquad \text{elde ederiz.} \qquad (12)$$

(11) den iki defa türev alarak $\frac{d^2Z}{dt^2} = - n^2 e^{int} z + 2in e^{int} \frac{dz}{dt}$

$+ e^{int} \frac{d^2z}{dt^2}$. (11) deki prensibi $F_X' + iF_Y$ ye tatbik ederek

$F_X' + iF_Y = e^{int}\,(F_x + iF_y)$ bunları (12) de yerlerine koyarak ve reel ve imajiner kısımları eşitliyerek

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\,\frac{dy}{dt} = F_x + n^2x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,n\,\frac{dx}{dt} = F_y + n^2y$$

elde ederiz. Şimdi $F^* = F + \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2)$ diyelim

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} = F^*_x$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} = F^*_y \tag{13}$$

(13) küçük cismin dönen koordinatlar sistemindeki hareket denklemleridir. Şimdi bu denklemlerde mevcut bütün kamiyetleri boyutsuz hale getireceğiz, m_1 m_2 uzunluğu l ve $m_1 + m_2 = M$ olsun

$\frac{x}{l} = \xi, \ \frac{y}{l} = \eta, \ \frac{m_2}{M} = \mu, \ nt = \tau$ diyelim. O zaman $\xi\eta$ küçük cismin boyutsuz koordinatları, τ boyutsuz zaman, μ m_2 nin boyutsuz kütlesi ve $\frac{m_1}{M} = 1 - \mu$ olduğundan $1 - \mu$ de m_1'in boyutsuz kütlesi olur. (13) ün birinci denklemini aşağıdaki gibi yazarak

$$n^2 l \frac{d^2 \frac{x}{l}}{n^2 dt^2} - 2n^2 l \frac{d \frac{y}{l}}{n dt} = \frac{\partial F^*}{l \partial \frac{x}{l}} \rightarrow \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2 \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\partial F^*}{n^2 l^2 \partial \xi}$$

Benzer şekilde ikinci denklemden

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2 \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\partial F^*}{n^2 l^2 d\eta}$$

buluruz. Bunlardan da

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2 \frac{d\eta}{d\tau} = \Omega\xi$$
$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2 \frac{d\xi}{d\tau} = \Omega\eta \tag{14}$$

elde ederiz. Burada

$$\Omega = \frac{F^*}{n^2 l^2} = \frac{F}{n^2 l^2} + \frac{1}{2} \frac{n^2}{l^2 n^2} (x^2+y^2) = \frac{G}{n^2 l^2} \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) + \frac{1}{2}$$

$(\xi^2 + \eta^2)$ dır. Kepler'in üçüncü kanununu, $GM = n^2 l^3$ kullanarak

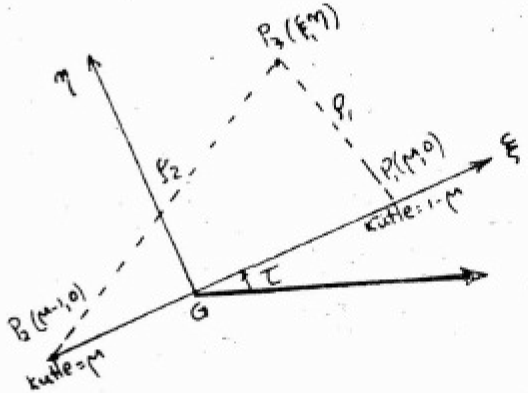
$$\Omega = \left(\frac{m_1 / M}{r_1 / l} + \frac{m_2 / M}{r_2 / l}\right) + \tfrac{1}{2}\,(\xi^2 + \eta^2) \text{ ve } \frac{r_1}{l} = \rho_1 , \ \frac{r_2}{l} = \rho_2$$

diyerek

$$\Omega = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \tfrac{1}{2}\,(\xi^2 + \eta^2) \qquad (15) \qquad \text{elde ederiz.}$$

(14) denklemleri küçük cismin boyutsuz koordinat sistemindeki hareket denklemleridir. Sistemin fiziksel tefsiri şöyledir: İki esas cisim ξ ekseni üzerindedir. $\xi\eta$ sistemi birim açısal hızla dönmektedir. İki cismin koordinatları $P_1\,(\mu,0)$ ve $P_2\,(\mu-1,\,0)$ dir. Kütleleri ise $1 - \mu$ ve μ dür. $0 < \mu < 1$ dir ve eşitlik halleri iki cisim problemini temsil eder. İki cisim arasındaki uzaklık, iki cismin açısal hızları, kütlelerinin toplamı birim olarak alınmıştır.

Şimdi (14) sisteminin bir integralini bulacağız. Birinci denklemi $\frac{d\xi}{d\tau}$ ikinciyi $\frac{d\eta}{d\tau}$ ile çarpıp neticeleri toplıyalım.



$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\;\frac{d\xi}{d\tau} - 2\,\frac{d\xi}{d\tau}\;\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{d^2\eta}{d\tau^2}\;\frac{d\eta}{d\tau} + 2\,\frac{d\xi}{d\tau}\;\frac{d\eta}{d\tau} = \Omega_\xi \frac{d\xi}{d\tau} +$$

$$\Omega\eta\;\frac{d\eta}{d\tau} \rightarrow \tfrac{1}{2}\,\frac{d}{d\tau}\left\{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2\right\} = \frac{d}{d\tau}\;\Omega \rightarrow$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta^2}{d\tau}\right) = 2\,\Omega - C \quad (16) \text{ elde ederiz.}$$

(16) meşhur Jacobi integrali, C de Jacobi sabitidir.

(14) denklemleri dördüncü mertebeden diferansiyel denklem sistemidir. (16) sistemin bir integralidir. Sistemin tam çözümünü elde etmek için üç integrale daha ihtiyaç vardır. Jacobi tarafından gösterilmiştir ki

eğer bu üç integralden biri bulunabilirse diğer ikisi bundan elde edilebilir. O halde sistemin tam çözümü için sadece bir integrale daha ihtiyaç vardır. Mamafih Bruns ve Poincaré tarafından da bu yeni integralin bulunamıyacağı ispatlanmıştır.

5.3 Sıfır hız eğrileri.

(16) denklemi küçük cismin koordinatları ile hızı arasında bir bağıntıdır. Eğer hızı sıfır alırsak denklem $\xi\eta$ düzleminde hızın sıfır olduğu yerlerin eğrilerini verecektir. $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 0$ koyarsak denklem aşağıdaki gibi olur. $2\,\Omega = C$ veya

$$\xi^2 + \eta^2 + \frac{2\,(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\,\mu}{\rho_2} = C \qquad (17)$$

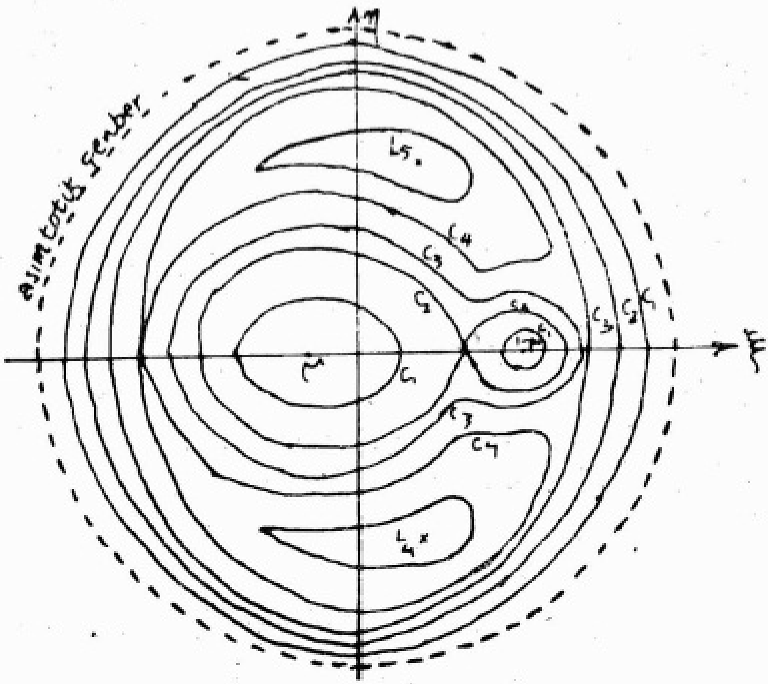
(17) fonksiyonu $\rho_1 = 0$ ve $\rho_2 = 0$ ve sonsuzda $(\xi^2 + \eta^2 \to \infty)$ kutupları haizdir. ξ ve η büyüdükçe denklem $\xi^2 + \eta^2 = C$ ye limit olarak yaklaşır. Bu ise yarıçapı $\sqrt{C}$ olan bir çenberdir. Bu çenbere asimtotik çenber diyeceğiz. ξ ve η nın büyük değerleri için ikinci ve üçüncü terimler küçüktür, bunları ε ile gösterirsek $\xi^2 + \eta^2 = C - \varepsilon$ elde ederiz. Bu, yarıçapı $\sqrt{C - \varepsilon}$ olan bir çenber denklemidir. O halde eğrinin bir dalı asimtotik çenber içinde bir dairesel ovaldir. ε küçüldükçe oval daha fazla dairemsi olur ve asimtotik çenbere daha fazla yaklaşır.

ξ ve η nın küçük değerleri için ilk iki terim ihmal edilebilir. Bunları ε ile gösterirsek $\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} = \frac{C}{2} - \varepsilon$ elde ederiz. Bu ise μ ve $1-\mu$ kütleleri etrafında eşpotansiyel eğrilerin denklemidir. C nın büyük değerleri için bu eğriler herbir kütle etrafında kapalı ovaldirler. C küçüldükçe bu ovaller büyür. evvelâ birbirine değer, sonra da tek eğri haline gelirler. Bu sırada asimtotik çenber içindeki dairemsi ovaller de içe doğru yaklaşırlar ve içteki ovale her iki taraftan değerler. C daha da küçüldükçe ovaller küçülür ve ξ ekseninin her iki tarafında ki simetrik iki noktada sıfıra müncer olurlar.

Durum şekil üzerinde kolayca anlaşılmaktadır. Bu eğrilerin üzerinde hız sıfırdır. Şimdi hızın pozitif olduğu, yâni hareketin mevcut olduğu kısımları inceliyeceğiz. (16) dan

$$v^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \frac{2\,(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\,\mu}{\rho_2} - C$$

dır. $C = C_1$ halinde (C_1 büyük) $\xi\eta$ çok büyük alınırsa sağ taraf positif olur. Bu demektir ki hız asimtotik çenber ile dıştaki dairesel oval arasında kalan kısımda pozitiftir. Dolayısiyle bu bölgenin her noktasında pozitif olacaktır, zira fonksiyon sadece sıfır hız eğrisini kesip öteki bölgeye geçerken negatif olmaktadır. Diğer taraftan $1-\mu$ ve μ ye çok yakın noktalarda ρ_1 ve ρ_2 çok küçük olacağından C_1 nekadar büyük olursa olsun sağ taraf pozitif olacaktır. O halde içteki iki oval içersinde hız pozitiftir. C küçüldükçe aynı bölgeler aynı özelliği devam ettirecektir. Hareket sadece hızın pozitif olduğu bölgelerde mümkündür.



Yukardaki incelemenin güzelliği şuradadır: Şayet C yeter derecede büyükse ve $1-\mu$ ve μ etrafındaki ovaller kapalı ise başlangıçta bu ovaller içerisinde bulunan bir küçük cisim daima içinde kalacaktır, zira cisim sıfır hız eğrisini kesemez. Gerçekten Hill, Ayın yerden olan uzaklığının bir üst limitin mevcut olduğunu bu yolla tayin etmişti.

5. 4 Çift katlı noktalar.

Daha evvel de bahsettiğimiz gibi ξ ekseni üzerinde üç tane, ve eğrilerin sıfıra müncer olduğu yerlerde iki tane olmak üzere toplam beş tane çift katlı nokta vardır. Sıfır hız eğrilerinin denklemi $2\Omega = C$ idi.

$\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}$ ifadeleri eğrinin normallerinin doğrultman kosinüsleriyle orantılıdır. Eğri üzerinde ise $\dfrac{d\xi}{d\tau} = \dfrac{d\eta}{d\tau} = 0$ dır. O halde (14) ten görülür ki $\dfrac{d^2\xi}{d\tau^2}$, $\dfrac{d^2\eta}{d\tau^2}$ yani ivmeler $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}$ ile, dolayısıyle normallerin doğrultman kosinüsleriyle orantılıdır. Buradan sıfır hız eğrisi üzerine bırakılacak küçük bir cismin normal doğrultusunda hareket edeceği sonucu çıkarılır. Çift katlı noktalarda normal doğrultusu belirsiz olduğundan, bu noktalara koyulacak küçük cismin ivmesi de sıfır olur dolayısıyla hareketsiz kalır. Diğer taraftan bu noktalarda $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0$ dır ve (14) denklemi özdeşlik olarak sağlanır. Dolayısiyla, çift katlı noktalar şartlı üç cisim probleminin özel çözümleri olurlar. Bu çözümler ilk defa Lagrange tarafından verildiğinden çift katlı noktalara Lagrange noktaları da denir, ve L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 ile gösterilirler. Biz bu noktalara bazan librasyon noktaları da diyeceğiz. ve burada sadece üçgensel noktalar adı verilen L_4 ve L_5 ile meşgul olacağız.

$\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} = 0$, $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} = 0$ denklemlerinden

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = \xi - (1-\mu)\frac{\xi-\mu}{\rho^3_1} - \mu\frac{\xi-\mu+1}{\rho_2^3} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = \eta - (1-\mu)\frac{\eta}{\rho^3_1} - \mu\frac{\eta}{\rho_2^3} = 0 \tag{19}$$

elde edilir.

Üçgensel noktalarda $\eta \neq 0$ dır.

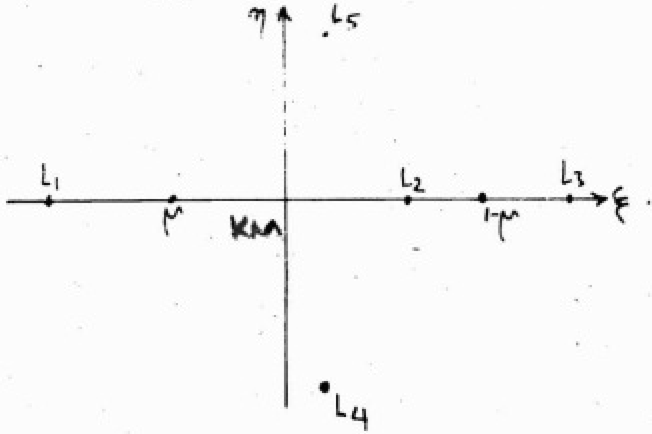
(19) dan $1-(1-\mu)\dfrac{1}{\rho^3_1} - \mu\dfrac{1}{\rho_2^3} = 0$ (20)

$\xi-\mu \neq 0$ ve $\xi-\mu+1 \neq 0$ olduğundan

(20) yı evvelâ $\xi-\mu$ ile sonra $\xi-\mu+1$ ile çarparak

$$(\xi-\mu)-(1-\mu)\frac{\xi-\mu}{\rho_1^3} - \mu\frac{\xi-\mu}{\rho_2^3} = 0 \tag{21}$$

$$(\xi-\mu+1)-(1-\mu)\ \frac{\xi-\mu+1}{\rho_1^3}-\mu\ \frac{\xi-\mu+1}{\rho_2^3}=0 \qquad (22)$$



(21) – (19) dan $\quad -\mu+\frac{\mu}{\rho_2^3}=0 \rightarrow -1+\frac{1}{\rho_2^3}=0$

(22) – (19) dan $\quad -\mu+1-\frac{1-\mu}{\rho_1^3}=0 \rightarrow 1+\frac{1}{\rho_1^3}=0$

Dolayısıyla $\rho_1 = 1$ ve $\rho_2 = 1$ dır. ρ_1^2 ve ρ_2^2 nin değerleri konulursa

$$(\xi-\mu)^2+\eta^2=1$$
$$(\xi-\mu+1)^2+\eta^2=1$$

elde ederiz. Buradan da $\xi=\mu-\frac{1}{2}$ ve $\eta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ buluruz.

O halde L_4 ve L_5 noktalarının koordinatları

$$L_4\ (\mu-\tfrac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{ve} \quad L_5\ (\mu-\tfrac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{dir.}$$

Şimdi Jacobi sabitinin değerini L_4 ve L_5 te bulacağız.

$\rho^2_1=(\xi-\mu)^2+\eta^2$

$\rho_2^2=(\xi-\mu+1)^2+\eta^2$

den $\quad (1-\mu)\rho^2_1+\mu\rho_2^2-\mu(1-\mu)=\xi^2+\eta^2$ bulunur

Bunu $\quad \xi^2+\eta^2+\frac{2(1-\mu)}{\rho_1}+\frac{2\mu}{\rho_2}=C$ de yerine koyalım.

$$(1-\mu)\ (\rho_1^2+\frac{2}{\rho_1})+\mu\,(\rho_2^2+\frac{2}{\rho_2})=C+\mu\,(1-\mu)=C'$$

Burada $\rho_1 = 1$ ve $\rho_2 = 1$ koyarsak $C' = 3$ elde ederiz. Üçgensel noktalarda Jacobi sabiti en küçük değerini aldığına göre harekette daima $C' > 3$ olmalıdır.

5.5 Çift katlı noktalar cıvarında periyodik yörüngeler.

Eğer ξ_o η_o librasyon noktasının koordinatları ise, bunlar

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} = \Omega_\xi(\xi,\eta)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} = \Omega_\eta(\xi,\eta)$$

denklemlerinin özel çözümüdürler. Şimdi bu noktadaki cisme küçük bir yer değiştirme verelim.

$$\xi = \xi_o + \Delta\xi \quad , \quad \eta = \eta_o + \Delta\eta$$

Bunları denklemde yerine koyar, ikinci tarafı Taylor serisine açar ve ikinci dereceden terimleri ihmal edersek

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Delta\xi - 2\frac{d}{d\tau}\Delta\eta = \frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi^2}\Delta\xi + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi\partial\eta}\Delta\eta$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Delta\eta + 2\frac{d}{d\tau}\Delta\xi = \frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi\partial\eta}\Delta\xi + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta^2}\Delta\eta$$

buluruz. Burada Ω nın kısmî türevleri ξ_o η_o noktasında hesap edilir, yani sabittirler. Dolayısıyle denklemlerimiz sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerdir. Çözüm için aşağıdaki transformasyonu yapalım.

$$\Delta\xi = \xi_1 \ , \ \Delta\eta = \xi_2 \, , \, \Delta\dot{\xi} = \xi_3 \, , \, \Delta\dot{\eta} = \xi_4$$

Bunlardan ve denklemlerden şimdi

$$\dot{\xi}_1 = \xi_3$$

$$\dot{\xi}_2 = \xi_4$$

$$\dot{\xi}_3 = \Omega_{\xi\eta}\,\xi_1 + \Omega_{\xi\eta}\,\xi_2 + 2\xi_4$$

$$\dot{\xi}_4 = \Omega_{\eta\xi}\,\xi_1 + \Omega\eta\eta\,\xi_2 - 2\xi_3$$

elde ederiz. Bu denklemler birinci mertebedendirler. Bunları determinantlarla aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{vmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{\xi\xi} & \Omega_{\xi\eta} & 0 & 2 \\ \Omega_{\eta\xi} & \Omega\eta\eta & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{vmatrix}$$

Veya daha kısa olsun diye

$$[\ \xi\ ] = [\ \mathbf{A}\ ]\ [\ \xi\ ]$$

yazalım.

Bu sistemin çözümü [A] – λ [I] = 0 karakteristik denkleminin λ için vereceği eigen değerlere ve eigen vektörlere bağlıdır. Burada [I] birim matristir. [A] – λ [I] = 0 yı bulalım:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{\xi\xi} & \Omega\xi\eta & 0 & 2 \\ \Omega_{\eta\xi} & \Omega\eta\eta & -2 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Buradan $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ \Omega_{\xi\xi} & \Omega_{\xi\eta} & -\lambda & 2 \\ \Omega_{\eta\xi} & \Omega\eta\eta & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ **buradan da**

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{\xi\xi} - \Omega\eta\eta)\,\lambda^2 + \Omega_{\xi\xi}\,\Omega\eta\eta - \Omega^2{}_{\xi\eta} = 0 \qquad (23)$$

Bu denklem çözülerek $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ eigen değerleri elde edilir. Bunlara tekabül eden eigen vektörler $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ ise sistemin çözümü

$$\Delta\xi = \Sigma\alpha_i \quad e^{\lambda_i\tau}$$

olur. $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$$\Delta\eta = \Sigma\beta_i \quad e^{\lambda i\tau}$$

Buradaki β_i ler α_i ler cinsinden hesap edilebilirler.

Çözümün kararlı veya kararsız (stabl veya instabl) oluşu λ ya bağlıdır. Eğer (23) den λ^2 için iki negatif kök çıkarsa, bunlara $-\sigma_1{}^2$ ve $-\sigma_2{}^2$ diyerek $\lambda_1 = i\sigma_1$, $\lambda_2 = -i\sigma_1$, $\lambda_3 = i\sigma_2$, $\lambda_4 = -i\sigma_2$ elde ederiz. O zaman çözümler

$$\Delta\xi = \alpha_1 e^{i\sigma_1\tau} + \alpha_2 e^{-i\sigma_1\tau} + \alpha_3 e^{i\sigma_2\tau} + \alpha_4 e^{-i\sigma_2\tau}$$

$$\Delta\eta = \beta_1 e^{i\sigma_1\tau} + \beta_2 e^{-i\sigma_1\tau} + \beta_3 e^{i\sigma_2\tau} + \beta_4 e^{-i\sigma_2\tau} \text{ (burada } i = \sqrt{-1} \text{ dir)}$$

olur. Euler açılımlarını kullanarak ve $\alpha_1 = \alpha_2 = A_1$, $\alpha_3 = \alpha_4 = A_2$, $\beta_1 = \beta_2 = B_1$, $\beta_3 = \beta_4 = B_2$ seçerek

$$\Delta\xi = A_1 \cos\sigma_1\tau + A_2 \cos\sigma_2\tau$$

$$\Delta\eta = B_1 \cos\sigma_1\tau + B_2 \cos\sigma_2\tau$$

periodik çözümleri elde edilir. Cisim librasyon noktası etrafında periodik bir yörünge çizer, sonsuza gitmez. Ve dolayısıyle de librasyon noktası stabl olur. (23) den λ için zıt işaretli iki reel kök çıkarsa çözüm periyodik olmaz, cisim zamanla sonsuza gider. Mamafih , bu durumda ilk şartlar öyle seçilebilirlirki integrasyon sabitlerinin (katsayıların) bazıları sıfır olur ve geriye kalan terimler kararlı bir çözüm verir. Eğer (23) λ için iki kompleks kök verirse kararlı çözüm elde etmek imkânsızdır.

Şimdi yukarıki incelemeyi L_5 noktasına tatbik edeceğiz:

$$\Omega = \tfrac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$$

den evvelâ $\Omega_{\xi\xi}$, $\Omega_{\eta\eta}$, $\Omega_{\xi\eta}$ ları bulur, sonra L_5 için

$$\xi = \mu - \tfrac{1}{2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \rho_1 = 1 \quad \text{ve} \quad \rho_2 = 1 \quad \text{koyarsak}$$

$$\Omega_{\xi\xi} = \tfrac{3}{4}$$

$$\Omega_{\eta\eta} = \frac{9}{4}$$

$$\Omega_{\xi\eta} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)$$

buluruz Bunları (23) de yerlerine koyalım $\lambda^4 + \lambda^2 + \dfrac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \rightarrow$

$$\lambda^2 = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\{1 - 27\mu(1-\mu)\}^{1/2}$$

buluruz. Eğer $27\mu(1-\mu) > 1$ is kökler pür imajiner olur. Bu şart $\mu < 0{,}03852$ için sağlanır. O halde $\mu < 0{,}03852$ olduğu taktirde periyodik yörüngelerelde edilebilmektedir. Güneş-Jüpiter sistemi için $\mu = 0{,}00095388$ dir. Yâni bu sistemin üçgen noktalarında periyodik yörüngeler bulmak mümkündür. μ nün bu değeri için denklem çözülürse $\lambda_{1,2} = \pm\, 0{,}08046\, i$ ve $\lambda_{3,4} = \pm\, 0{,}996758\, i$ bulunur. Koordinat sisteminin dönme periyodu jüpiterinki ile aynı olduğundan periyodları bulmak için 11,86 yı λ lara böleriz.

Bunların ilki Jüpiterin periyodunun 12,5 katı $\cong$ 148 yıl, ve diğeri Jüpiterin periyodundan biraz büyük $\cong$ 11,90 yıl civarındadır. Gerçekten Güneş-Jüpiter sisteminin üçgen noktaları etrafındaki Trojan asteroidleri için iki çeşit yörünge rasat edilmiştir ve periyodları yukarıkilere uymaktadır.