

zaman sıfır olmayacak ve dolayısıyla da sayısal olarak elde ettiğimiz türevler tam hassas olmayacaktır.

7.3 Sayısal (nümerik) integrasyon.

Sadece tablolar şeklinde bilinen fonksiyonel bağıntılarda, integrasyon aşağıda ki formüller yardımıyla yapılır. Bu formülleri yazmadan önce, farklar tablosunu sola doğru iki sütun genişleteceğiz. Birinci ve ikinci integrasyona karşılık gelen bu sütunları f nin sol üst tarafına yazacağımız 1 ve 2 sayıları ile göstereceğiz. Bu durumda genişletilmiş olan farklar tablomuz aşağıdaki gibi olacaktır.

arg	2f	1f	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
$a - 3\omega$			f_{-3}					
$a - 2\omega$			f_{-2}	$f^1_{-3/2}$	f^2_{-2}			
$a - \omega$			f_{-1}	$f^1_{-1/2}$	f^2_{-1}	$f^3_{-3/2}$	f^4_{-1}	
a	2f_0		f_0	$f^1_{1/2}$	f^2_0	$f^3_{-1/2}$	f^4_0	$f^5_{-1/2}$
$a + \omega$	2f_1	${}^1f_{1/2}$	f_1	$f^1_{1/2}$	f^2_1	$f^3_{1/2}$	f^4_1	$f^5_{1/2}$
$a + 2\omega$	2f_2	${}^1f_{3/2}$	f_2	$f^1_{3/2}$	f^2_2	$f^3_{3/2}$		
$a + 3\omega$	2f_3	${}^1f_{5/2}$	f_3	$f^1_{5/2}$				

Bir katlı integral alma formülü:

$$\frac{1}{\omega} \int_a^a f(x)dx = {}^1f_{1/2} - \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} \left(\frac{f^1_{-1/2} + f^1_{1/2}}{2} \right) + \frac{11}{720} \left(\frac{f^3_{-1/2} + f^3_{1/2}}{2} \right) - \dots \quad (4)$$

İki katlı integral alma formülü:

$$\frac{1}{\omega^2} \int \int f(x)dx^2 = {}^2f_0 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} f^2_0 + \frac{31}{60480} f^4_0 - \dots \quad (5)$$

Uygulama 1: $x = 0$ iken $\int f(x)dx$ ve $\int \int f(x)dx^2 = 0$ olduğuna göre $f(x) = 3x^2 - 3$ fonksiyonunun bir ve iki katlı integrallerinin değerini $x = 1, 2, \dots$ için bulalım.

Verilen fonksiyonun bir ve iki katlı integrallerinin değerleri $x = 0$ için bilindiğinden, bu değeri a olarak kabul ederiz ve bundan önceki ve sonraki üçer değeri tabloya yerleştirip bunlara karşılık gelen fonksiyon

değerlerini ve farkları hesap ederiz. a ya karşılık gelen bir ve iki katlı integral değerleri zaten verilmiş durumdadır. Bunları da x ile 2f arasında iki sütuna yazarız. Şu andaki durum aşağıdaki gibi olacaktır.

x	$\int f(x) dx^2$	$\int f(x) dx$	2f	1f	f	f'	f''
-3					24		
-2					9	-15	6
-1					0	-9	6
0	0	0			-3	-3	6
1	.	.			0	3	6
2					9	9	6
3					24	15	

Şimdi (4) formülünden

$$\frac{1}{1} \times 0 = {}^1f_{1/2} - \frac{1}{2} (-3) - \frac{1}{12} \left(\frac{-3 + 3}{2} \right) \text{ buradan da}$$

${}^1f_{1/2} = -1,5$ elde ederiz. Bu değeri tabloda yerine koyarız ve ${}^1f_{3/2} - {}^1f_{1/2} = f_1$ den ${}^1f_{3/2} = -1,5$ sonra da ${}^1f_{5/2} - {}^1f_{3/2} = f_2$ den ${}^1f_{5/2} = 7,5$ buluruz ve bunları da tabloda yerlerine koyarız. Bu andan itibaren $\int f(x) dx$ 'i $x = 1$ için integre etmeye hazırız. Bunun için (4) formülündeki indisleri bir çoğaltırız. (Dikkat edilmelidir ki bunun nedeni $x = 1$ için integre edeceğimizden değil sadece bir sonraki integrasyona geçtiğimizdendir).

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} \int f(x) dx &= {}^1f_{3/2} - \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{12} \left(\frac{{}^1f_{1/2} + {}^1f_{3/2}}{2} \right) \\ &= 1,5 - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{12} \left(\frac{3 - 9}{2} \right) \\ &= -2,0 \end{aligned}$$

Böylece $f(x)$ in bir katlı integralinin $x = 1$ için değeri $-2,0$ olarak elde edilmiş oldu. Bu değeri de tabloda $\int f(x) dx$ sütununa ve $x = 1$ in satırına yazarız. Bu, $x = 1$ için bir katlı integrasyon işlemini tamamlamış olur.

Aşağıda $x = 1$ için integrale edildikten sonra tablonun durumu görülmektedir:

x	$\iint f(x) dx^2$	$\int f(x) dx$	2f	1f	f	f'	f''
-3					24		
-2					9	-15	6
-1					0	-9	6
0	0	0			-3	-3	6
1		-2,0	-1,5		0	3	6
2			-1,5		9	9	6
3			7,5		24	15	

Şimdi eğer integralin değerini $x = 2$ için bulmak istiyorsak formüldeki indisleri yeniden birer artırırız ve tabloda mevcut değerleri formülde yerlerine koyarak sonucu elde ederiz. Ve böylece de integrasyonu istenildiği kadar uzatabiliriz.

Şimdi de iki katlı integralin hesabına geçiyoruz: $x = 0$ için iki katlı integralin değeri verilmiş bulunduğundan (5) formülünden

$$\frac{1}{12} \times 0 = {}^2f_0 - \frac{1}{12} (-3) - \frac{1}{240} \times 6$$

Buradan da ${}^2f_0 = 0,28$ elde edilir. Bu değeri tabloda yerine koyarız ve ${}^2f_1, {}^2f_2, {}^2f_3$ değerlerini hesap edip onları da tabloya geçiririz. Bu anda iki katlı integral değerini $x = 1$ için bulmaya hazırız. Bunun için (5) formülündeki indisleri birer artırırız.

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \iint f(x) dx^2 &= {}^2f_1 - \frac{1}{12} f_1 - \frac{1}{240} f_1^2 \\ &= -1,22 - \frac{1}{12} \times 0 - \frac{1}{240} \times 6 \\ &= -1,25 \end{aligned}$$

Bu değer $\iint f(x) dx^2$ nin $x = 1$ için değeridir. Bunu tabloda yerine koyarsak işlem tamamlanmış olur. Aşağıda bu durumu görüyoruz:

x	$\iint f(x) dx^2$	$\int f(x) dx$	2f	1f	f	f^1	f^2
-3					24		
						-15	
-2					9		6
						-9	
-1					0		6
						-3	
0	0	0	0,28		-3		6
				-1,5		3	
1	-1,25	-2,0	-1,22		0		6
				-1,5			
2			-2,72		9	9	6
				7,5			
3			4,78		24	15	

İntegralin değerini $x = 2$ için hesap etmek istiyorsak yine indisleri birer çoğaltmak ve yukarıda ki gibi işleme devam etmek gerekir. Ve böylece devam eder. ...

Uygulama 2. $t = 0$ iken $x_0 = 1$ ve $\dot{x}_0 = 1$ olduğuna göre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \quad (1)$$

ikinci mertebe diferansiyel denkleminin $\omega = 0,1$ aralıkla nümerik integrasyonu:

Bu örnekte serbest değişken t olduğundan 7.3.4 ve 7. 3. 5 denklemleri

$$\frac{1}{\omega} \int_a^a f(t) dt = {}^1f_{1/2} - \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} \left(\frac{f^1_{-1/2} + f^1_{1/2}}{2} \right) + \frac{11}{720} \left(\frac{f^3_{-1/2} + f^3_{1/2}}{2} \right)$$

$$\frac{1}{\omega^2} \iint_a^a f(t) dt^2 = {}^2f_0 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} f^2_0 + \frac{31}{60480} f^4_0 \dots \quad (2)$$

şeklinde dirler. İkinci denklemden görüleceği üzere sağ taraftaki farklar hesap edildikten sonra ω^2 ile çarpılacak ve ondan sonra x elde edilecektir. Pratikte bu çarpma işlemi başlangıçtan yapılır. Dolayısıyla (1) yerine

$$f(t) = \omega^2 \frac{dx^2}{dt^2} = -\omega^2 x$$

dif. denklemi integre edilir. Kısa olsun diye sol tarafı f ile göstereceğiz.

$$(2) \text{ denklemlerinde } f(t) = \omega^2 \frac{dx^2}{dt^2} \text{ koyalım,} \quad (3)$$

$$\omega \int^a \frac{d^2x}{dt^2} dt = 1f_{1/2} - \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} \left(\frac{f_{-1/2}^1 + f_{1/2}^1}{2} \right) + \frac{11}{720} \left(\frac{f_{-1/2}^3 + f_{1/2}^3}{2} \right) + \dots$$

$$\int \int^a \frac{d^2x}{dt^2} dt^2 = 2f_0 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} f_0^2 + \frac{31}{60480} f_0^4 - \dots$$

olur. $t = 0$ için $\int^0 \frac{d^2x}{dt^2} dt = \dot{x}_0$ ve $\int \int^0 \frac{d^2x}{dt^2} dt^2 = x_0$ değerlerini yerlerine koyarak

$$\dot{x}_0 = 1f_{1/2} - \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} \left(\frac{f_{-1/2}^1 + f_{1/2}^1}{2} \right) + \frac{11}{720} \left(\frac{f_{-1/2}^3 + f_{1/2}^3}{2} \right) + \dots \quad (4)$$

$$x_0 = 2f_0 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} f_0^2 + \frac{31}{60480} f_0^4 + \dots \quad (5)$$

elde ederiz.

Şimdi integrasyonu başlatacağız. Bundan önceki örnekte serbest değişkenin her değeri için fonksiyon hesap edilebiliyordu. Burada ise bu yapılamaz. Sadece $t = 0$ için fonksiyon değeri olan $x_0 = 1$ verilmektedir. Bunu ve ω nın değerini (3) te yerlerine koyalım.

$$f_0 = - (0,1)^2 \cdot 1 = - 0,01$$

buluruz. Bunu farklar tablosunda yerine koyalım.

t	x	$2f$	$1f$	f	f^1	f^2	f^3
0	1			-0,01			

Şimdi de $f_{-1/2}^1$ ve $f_{1/2}^1$ sıfır kabul ederek (4) ten

$$0,1 \cdot 1 = 1f_{1/2} + \frac{1}{2} (-0,01) \text{ den } 1f_{1/2} = 0,095$$

f_0^2 1 sıfır kabul ederek (5) ten

$$1 = 2f_0 + \frac{1}{12} (-0,01) \text{ den } 2f_0 = 1,000833$$

elde ederiz.

$$2f_1 - 2f_0 = 1f_{1/2} \text{ den de } 2f_1 = 1,095833$$

buluruz. Bunları tabloda yerlerine koyalım

t	x	2f	1f	f	f ¹	f ²	f ³
0	1	1,000833		-0,01			
			0,095				
0,1		1,095833					
.							
.							
.							

Şimdi sıra $t = 0,1$ için x_1 in değerini bulmaya gelmiştir. Bunun için (5) teki indisleri birer çoğaltmak gerekir. Fakat tabloda f_1 değerinin henüz olmadığını gözönüne alarak biz (5) formülünü değilde Newton formülünden iki defa integral alarak elde edilen aşağıdaki formülü kullanacağız.

$$x_0 = 2f_0 + \frac{1}{12} f_{-1} + \frac{1}{12} f^1_{-3/2} + 0,0791667 f^2_{-2} + 0,075 f^3_{-5/2} \quad (6)$$

Burada indisleri birer çoğaltalım:

$$x_1 = 2f_1 + \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{12} f^1_{-1/2} + \dots$$

Tablodaki değerleri yerlerine koyarak ve $f^1_{-1/2}$ yi de sıfır kabul ederek

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,095833 + \frac{1}{12} (-0,01) \\ &= 1,095000 \end{aligned}$$

x_1 için bulduğumuz bu değer geçici bir değerdir. Bunu (3) de yerine koyarak $f_1 = -(0,1)^2 \cdot 1,095000$

$$= -0,010950$$

elde ederiz. f_1 in ve bu x_1 in geçici değeri tablodaki yerine konur ve $f^1_{1/2}$ de hesap edilir.

t	x	2f	1f	f	f ¹	f ²
0	1	1,000833		-0,01		
			0,095			-0,000950
0,1	1,095	1,095833		-0,010950		
.						
.						
.						

Şimdi (6) formülünden daha hassas olan

$$x_0 = 2f_0 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} f^2_{-1} - \frac{1}{240} f^3_{-3/2} + \dots \quad (7)$$

formülündeki indisleri birer çoğaltırız ve x_1 i tekrar hesap ederiz:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2f_1 + \frac{1}{12} f_1 - \dots \\ &= 1,095833 + \frac{1}{12} (-0,010950) \\ &= 1,094921 \end{aligned}$$

x_1 in bu değeri daha iyi bir değerdir. Bunu (3) te yerine koyarsak $f_1 = -0,010949$ buluruz. x_1 in ve f_1 in tablodaki eski değerlerini siler yerlerine yeni değerlerini koyarız ve $f^1_{1/2}$ yi de yeniden hesap ederiz.

Durum aşağıdaki gibi olacaktır:

t	x	2f	1f	f	f ¹	f ²
0	1	1,000833		-0,01		
			0,095		-0,000949	
0,1	1,094921	1,095833		-0,010949		

(7) formülünden x_1 i tekrar hesap edersek yine 1,094921 elde ederiz. O halde x_1 kesin şeklini almıştır.

Şimdi $t = 0,2$ için x_2 nin hesabına geçiyoruz. Önce

$$1f_{3/2} - 1f_{1/2} = f_1 \text{ den } 1f_{3/2} = 0,084051,$$

sonra $2f_2 - 2f_1 = 1f_{3/2}$ den $2f_2 = 1,179884$ elde ederiz.

(6) daki indisleri tekrar birer çoğaltarak

$$\begin{aligned} x_2 &= 2f_2 + \frac{1}{12} f_1 + \frac{1}{12} f^1_{1/2} + \dots \\ &= 1,179884 + \frac{1}{12} (-0,010949) + \frac{1}{12} (-0,000949) \\ &= 1,178893 \end{aligned}$$

Bunu kullanarak $f_2 = -\omega^2 x_2 = -0,011789$ elde ederiz. Bunları tabloda yerlerine koyalım:

t	x	$2f$	$4f$	f	f'	f''	f'''
0,0	1,000000	1,000833		-0,010000			
			0,095000		-0,000949		
0,1	1,094921	1,095833		-0,010949		0,000109	
			0,084051		-0,000840		
0,2	1,178893	1,179884		-0,011789			

Şimdi(7) deki indisleri tekrar birer çoğaltıp x_2 yi yeniden hesap edeceğiz.

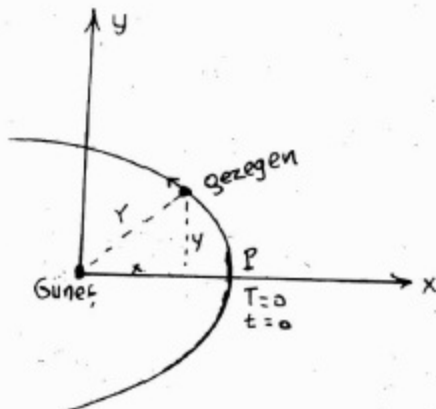
$$\begin{aligned}
 x_2 &= 2f_2 + \frac{1}{12} f_2 - \frac{1}{240} f_2'' \\
 &= 1,179884 - \frac{1}{12} (-0,011789) - \frac{1}{240} \cdot 0 \\
 &= 1,178901
 \end{aligned}$$

x_2 nin bu değeri daha sahatlidir. Bu değer tabloda 1,178893 ün yerine koyulur. Bu yeni x_2 değeri ile f_2 yi hesap edersek görürüzki $f_2 = -0,011789$ çıkmakta yani değişmemektedir. O halde x_2 de kesin şeklini almış demektir. Bundan sonra aynen yukarıda olduğu gibi devam edilir....

Not. Bu örnekte denklemin sadece yaklaşık çözümlerinin elde edildiğine dikkat ediniz.

7.4 İki cisim probleminin sayısal integrasyonu.

Kütlesi Güneş kütlesine göre ihmal edilebilen bir küçük gezegenin yörüngesini nümerik integrasyonla elde edeceğiz. Gezegenin hareket denklemleri,



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 \frac{y}{r^3} \quad (1)$$

Burada $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $k = 0,01720209895$ tir. x, y, r astronomi birimi cinsinden, t ise efemeris günü cinsinden ölçülmektedirler.

İki-cisim probleminden yörüngeyi elips olduğu bilinir. Bu elipsin yarı-büyük eksen uzunluğu $a = 2$ A. B. ve dış merkezliği $e = 0,2$ olsun.

Zaman başlangıcı olarak cismin perihelden geçiş anını alalım. O halde perihel noktasında $t = 0$ dır. Aynı zamanda $T = 0$ dır. P noktasında

$$x_0 = r_0 = a(1-e) = 1,6 \text{ A. B. ve } y = 0 \quad (2)$$

dır. Bu noktadaki hızın bileşenlerini bulmak için,

$$x = a(\cos E - e)$$

$$y = a\sqrt{1-e^2} \sin E \text{ den } t \text{ ye göre türev alırız.}$$

$$\dot{x} = -a \sin E \dot{E}$$

$$\dot{y} = a\sqrt{1-e^2} \cos E \dot{E}$$

\dot{E} yi $n(t-T) = E - e \sin E$ den türev alarak bulalım.

$$n = \dot{E} - e \cos E \dot{E}, \quad \dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{ka^{-3/2}}{1 - e \cos E} \text{ dolayısıyla}$$

$$\dot{x} = -a \sin E \frac{ka^{-3/2}}{1 - e \cos E}$$

$$\dot{y} = a\sqrt{1-e^2} \cos E \frac{ka^{-3/2}}{1 - e \cos E}$$

perihel noktasında $E = 0$ olduğundan

$$\dot{x}_0 = 0$$

$$\dot{y}_0 = a\sqrt{1-e^2} \frac{ka^{-3/2}}{1-e} = \frac{1}{\sqrt{a}} k \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 0,01489745 \quad (3)$$

Şimdi gayemiz belirli bir zaman aralığı seçmek ve buna tekabül eden x ve y değerlerini bulmaktır. Bu aralık öyle seçilmelidirki farklar tablosu gittikçe küçülsün. Yukarıki yörünge için $\omega = 10$ gün seçilebilir. Integre edeceğimiz denklemleri bundan evvelki örnekte olduğu gibi ω^2 ile çarparak

$$f_x = \omega^2 \ddot{x} = -k^2 \omega^2 \frac{x}{r^3} \quad (4)$$

$$f_y = \omega^2 \ddot{y} = -k^2 \omega^2 \frac{y}{r^3}$$

denklemlerini elde ederiz. İntegrasyonu başlatabilmek için $t = -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30$ değerlerine tekabül eden x, y, f_x ve f_y değerleri hesap edilir. Bunun için

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{k^2}{a^3}} = k \sqrt{\frac{1}{a^3}} = 0,01720209795 \sqrt{\frac{1}{2^3}}$$

radyan $\times 570,2957795 = 0^\circ,348464933$ /gün, $T = 0, a = 2, e = 0,2$ olduğundan

$$\begin{aligned} n(t-T) &= M \text{ den } M \\ M &= E - e \sin E \text{ den } E \\ x &= a(\cos E - e) \text{ den } x \\ y &= a\sqrt{1-e^2} \sin E \text{ den } y \\ r^2 &= (x^2 + y^2)^{1/2} \text{ den } r \\ f_x &= -k^2 \omega^2 x/r^3 \text{ den } f_x \\ f_y &= -k^2 \omega^2 y/r^3 \text{ den } f_y \end{aligned} \quad (5)$$

hesap edilir. Bulunan değerler aşağıda verilmektedir.

t	x	f_x	y	f_y
-30	1,54843	-0,0109729	-0,44212	0,0031331
-20	1,57697	-0,0112949	-0,29652	0,0021238
-10	1,59423	-0,0114924	-0,14879	0,0010726
0	1,60000	-0,0115591	0,00000	0,0000000
10	1,59423	-0,0114924	0,14879	-0,0010726
20	1,57697	-0,0112949	0,29652	-0,0021238
30	1,54843	-0,0109729	0,44212	-0,0031331

Bundan sonraki işlemleri yalnız birinci denklem için yâni x ler için ayrıntılı olarak göstereceğiz. y ler için de işlemler tamamiyle aynı şekilde ve aynı anda icra edilir.

Evvelâ f_x in bulduğumuz yedi değerini tablo da yerlerine koyarız ve beşinci farklara kadar farklar tablosunu teşkil ederiz.

t	x	² f	¹ f	f _x	f ¹	f ²	f ³	f ⁴	f ⁵
-30				-0,0109729					
-20				-0,0112949	- 3220	+ 1245			
					- 1975		+ 63		
-10				-0,0114924		+ 1308		-37	
0	1,60000	² f ₀		-0,0115591	- 667	+ 1334	+ 26	-52	-15
10	1,59423		¹ f _{1/2}	-0,0114924	+ 667	+ 1308	-26	-37	+ 15
20	1,57697			-0,0112949	+ 1975	+ 1245	- 63		
30	1,54843			-0,0109729	+ 3220				

Şimdi ${}^1f_{1/2}$ ve 2f_0 ı hesap edeceğiz. Perihel noktasında x_0 ve \dot{x}_0 verilmiş-ti 149 inci sayfadaki (4) ve (5) formüllerini tekrar yazalım.

$$\omega \dot{x}_0 = {}^1f_{1/2} - \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} \left(\frac{f_{-1/2}^1 + f_{1/2}^1}{2} \right) + \frac{11}{720} \left(\frac{f_{-1/2}^3 + f_{1/2}^3}{2} \right) - \frac{191}{60480} \left(\frac{f_{-1/2}^5 + f_{1/2}^5}{2} \right)$$

$$x_0 = {}^2f_0 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} f_0^2 + \frac{31}{60480} f_0^4.$$

(2), (3) ve yukarıki tablodan değerler yerlerine koyulursa

$${}^1f_{1/2} = - 0,0057796$$

$${}^2f_0 = 1,6009638 \quad \text{elde edilir.}$$

Şimdi bu değerler tablo da yerlerine koyulur ve sonra da ${}^1f_{3/2}$, ${}^1f_{5/2}$, ${}^1f_{7/2}$ hesap edilir. Daha sonra da 2f_1 , 2f_2 , 2f_3 ve 2f_4 hesap edilir, ve tablo aşağıdaki şekli ahr.

t	x	² f	¹ f	f	f ¹	f ²	f ³	f ⁴	f ⁵
-30				-0,0109729					
-20				-0,0112949	-3220	1245			
					-1975		63		
-10				-0,0114924		1308		-37	
0	1,60000	1,6009638		-0,0115591	-667	1334	26	-52	-15
10	1,59423	1,5951842	-0,0057796	-0,0114924	667	1308	-26	-37	15
20	1,57697	1,5779122	-0,0172720	-0,0112949	1975	1245	-63		
30	1,54843	1,5493453	-0,0285669	-0,0109729	3220				
40		1,5098055	-0,0395398						

Dikkat edilirse farkları yazarken kağıda sığsın diye soldaki sıfırları koymadık. Bütün bu f^1, f^2, f^3, f^4 ve f^5 farkları da yedi ondahkhdırlar.

Şimdi sıra $t = 40$ için x_4 ün hesabına gelmiştir. Bunun için önce Newton interpolasyon formülünden iki defa integral alarak elde edilen

$$x_0 = 2f_0 + \frac{1}{12} f_{-1} + \frac{1}{12} f_{1-3/2} + 0,0791667 f_{2-2} + 0,075 f_{3-5/2} + 0,07135 f_{4-3} + 0,0682 f_{5-7/2}$$

formülündeki indisleri dört çoğaltırız:

$$x_4 = 2f_4 + \frac{1}{12} f_3 + \frac{1}{12} f_{15/2} + 0,0791667 f_{22} + 0,075 f_{33/2} + 0,071235 f_{41} + 0,06882 f_{51/2}$$

$$= 1,5098055 + \frac{1}{12} (-0,0109729) + \frac{1}{12} (0,0003220) + 0,0791667 (0,0001245) + 0,075 (-0,0000063) + 0,07135 (-0,0000037) + 0,0682 (0,0000015) = 1,5089111$$

x_4 için bulduğumuz bu değer geçici bir değerdir. Bu esnada yukardaki işlemler y ler için de yapılmakta olduğundan y_4 için de bir geçici değer elde edilmiş durumda olacaktır. x_4 ve y_4 ün bu geçici değerleri (5) te yerlerine koyularak $fx_4 = -0,0105371$ değeri elde edilir, bu değer tabloda yerine konur ve sağa doğru farklar alınarak tablo genişletilir.

Tablonun şimdiki durumu aşağıdaki gibi olacaktır:

t	x	$\frac{1}{2}f$	$\frac{1}{4}f$	f_x	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
-30				-0,0109729					
					-3220				
-20				-0,0112949		1245			
					-1975		63		
-10				-0,0114924		1308		-37	
					-667		26		-15
0	1,60000	1,6009638		-0,0115591		1334		-52	
			-0,0057796		667		-26		15
10	1,59423	1,5951842		-0,0114924		1308		-37	
			-0,0172720		1975		-63		-7
20	1,57697	1,5779122		-0,0112949		1245		-44	
			-0,0285669		3220		-107		
30	1,54843	1,5493453		-0,0109729		1138			
			-0,0395389		4358				
40	1,50891	1,5098055		-0,0105371					

Şimdi x_4 ün yukarıdaki geçici değeri daha hassas olan aşağıdaki formülle test edilecektir:

$$x_0 = 2f_0 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} f^2_{-1} - \frac{1}{240} f^3_{-3/2} - 0,00365 f^4_{-2} \\ - 0,0031 f^5_{-5/2}$$

indisleri dört çoğaltarak,

$$x_4 = 2f_4 + \frac{1}{12} f_4 - \frac{1}{240} f^2_3 - \frac{1}{240} f^3_{5/2} - 0,00365 f^4_2 \\ - 0,0031 f^5_{3/2}$$

$$= 1,5098055 + \frac{1}{12} (-0,0105371) - \frac{1}{240} (0,0001138) - \frac{1}{240} \\ (-0,0000107) - 0,00365 (-0,0000044) - 0,0051 (-0,0000007) \\ = 1,50892$$

x_4 ün bu değeri yukarıda bulduğumuz geçici değerinden beşinci hanede bir birim fark etmekte olduğundan kesin değer olarak alınabilir. Eğer fark daha büyük olsaydı bu değeri kullanarak yeniden fx_4 hesap edilecek ve sonra da daha hassas x_4 değeri aranacaktı.

Bundan sonra sıra $t = 50$ için x_5 in değerini bulmaya geliyor. Bunun için x_4 ü bulurken yapılan işlemler aynen tekrar edilecektir. Her defasında indisler bir çoğaltılacak ve böylece integrasyon istenildiği kadar yürütülecektir.

x ler için bu hesaplar yapılırken aynı hesapların aynı anda y ler için de yürütülmesi gerekir. Zira f_x ve f_y lerin hesabında hem x ve hem de y değerlerine ihtiyaç vardır. Yukarıda x ler için kullandığımız formüller x yerine y yazarak y lerin hesabında kullanılmaktadır. Tekrar ayrıntıya girmeden y ler için elde edilen sonuçları aşağıda veriyoruz:

t	y	2f	4f	f_y	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
-30				0,0031331					
-20				0,0021238	-10093				
-10				0,0010726	-10512	-419	205		
0	0,00000	0,0000000		0,0000000	-10726	-214	214	9	-9
10	0,14879	0,1488848	0,1488848	-0,0010726	-10726	0	214	0	-9
20	0,29652	0,2966970	0,1478122	-0,0010726	-10512	214	205	-9	-15
30	0,44212	0,4423854	0,1456884	-0,0021238	-10093	419	181	-24	
40	0,58460	0,5849407	0,1425553	-0,0031331	-9493	600			
40				-0,0040824					

Böylece elde ettiğimiz x ve y e değerleri (1) diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Diğer bir deyişle hareket eden küçük gezegenin koordinatlarıdır.

7.5 Üç cisim probleminin sayısal integrasyonu.

Bundan önceki kısımda kütlesi Güneşinki yanında ihmal edilebilen bir cismin Güneş etrafındaki eliptik yörüngesini biliyor kabul etmiş ve cismin perihelden başlayarak bu yörünge üzerindeki hareketini, yâni herhangi bir andaki koordinatlarını, nümerik integrasyonla elde etmiştik. Orada küçük cismi eliptik hareketinden saptıran bir başka bozucu cisim (üçüncü cisim) mevcut değildi.

Bu kısımda ise, küçük cismin Güneş etrafındaki eliptik hareketinin bir üçüncü cisim tarafından bozulduğunu kabul edecek ve bu şart altında küçük cismin koordinatlarını bulmaya çalışacağız. Bu gaye için en çok kullanılan iki meşhur metod vardır: Cowell ve Encke metodu. Biz burada Cowell nümerik integrasyon metodunun bir uygulamasını vereceğiz. Bunun için genelliği bozmayacak fakat hesapları kolaylaştıracak basit bir örnek seçiyoruz.

Farzedelimki Yer ile Mars opozisyon haline gelmeden 100 gün önce Yer'den fırlatılan bir roket 285 gün sonra Mars'a varmıştır. Yer ve Mars'ın yörüngelerini aynı düzlemde kabul edelim ve birincinin yarıçapı 1 A.B. ve ikincinin yarıçapı 1,523679 A.B. olmak üzere her iki yörüngeyi dairesel alalım. Keza Yer ve Marsın bu roket üzerine hiç etki etmediklerini varsayalım. Bu durumda roketimiz Güneş etrafında bir elips çizecektir. Gauss yöründe tayini metodunu uyguluyarak bu yörünge için bulduğumuz elemanlardan bize lâzım olacakları aşağıda veriyoruz:

$$a = 1,2638542315 \text{ A. B.}$$

$$e = 0,2096211443$$

$$T = 5,8887884639 \text{ gün (atılış anından itibaren)}$$

$$n = 0,0121069838 \text{ rad/gün}$$

$$\dot{x}_0 = 0,0017404041 \text{ A.B./gün}$$

$$\dot{y}_0 = 0,0188324564 \text{ A.B./gün}$$

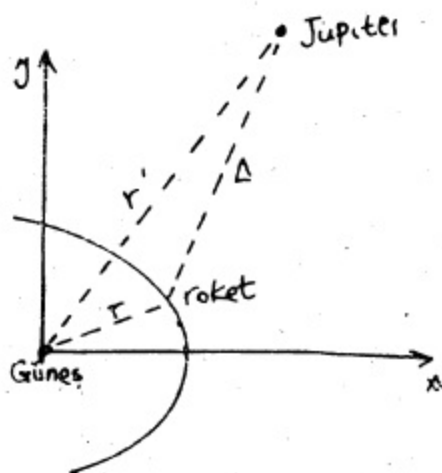
Şimdi Jüpiter'in bu yörünge üzerinde yapacağı etkilerden dolayı roketin herhangi bir andaki koordinatları yukardaki eliptik elemanlar vasıtasıyla bulacağımız koordinatlardan farklı olacaktır. Dolayısıyla Cowell metodunu kullanarak bu bozulmuş koordinatları bulmaya çalışalım.

Sayfa 131'e göre roketin Jupiter etkisi altında Güneş etrafındaki hareketinin denklemleri

$$\ddot{x} = -G \frac{m_0 + m}{r^3} x + Gm' \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right)$$

$$\ddot{y} = -G \frac{m_0 + m}{r^3} y + Gm' \left(\frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) \quad (1)$$

dir. Burada x, y roketin, x', y' Jüpiterin Güneş merkezli koordinatları $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $\Delta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ dir ve düzlemsel hareket kabul ettiğimizden z koordinatı mevcut değildir.



Güneş kütleini birim kabul edeceğiz. O zaman Jüpiterin kütlesi 10^{-3} olur. Roketin kütlesi ise ihmal edilmektedir. $m_0 = 1$, $m = 0$, ve $m' = 10^{-3}$ koyarak ve bundan önceki örneklerde olduğu gibi integre edeceğimiz denklemleri ω^2 ile çarparak,

$$f_x = 10^{-3} \omega^2 k^2 \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) - \frac{\omega^2 k^2}{r^3} x$$

$$f_y = 10^{-3} \omega^2 k^2 \left(\frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) - \frac{\omega^2 k^2}{r^3} y \quad (2)$$

denklemlerini elde ederiz. Buradaki $k^2 = G$ dir.

İntegrasyonu roketin atılış anından itibaren başlatalım. Bu anda $t = 0$ dir. İntegrasyon aralığı olarak $\omega = 5$ gün seçiyoruz. Bu aralık değeri deneme ile tespit edilmiştir. İntegrasyonu başlatabilmek için

başlangıç ($t = 0$) anından önce ve sonra üç an için roketin koordinatlarının bilinmesi gerekir. Bu koordinatları

$$M = n (t-T) \text{ den } M \text{ yi}$$

$$M = E - e \sin E \text{ den } E \text{ yi}$$

$$x = a (\cos E - e) \text{ den } x \text{ i}$$

$$y = a \sqrt{1-e^2} \sin E \text{ den } y \text{ yi hesap ederek elde ederiz.}$$

Bulunan değerler aşağıdadır:

TABLO 1

Roketin Koordinatları

t	x	y
-15	0,935339132	-0,3870342006
-10	0,961867269	-0,2970506011
-5	0,981426834	-0,2049166037
0	0,993788976	-0,1112810373
5	0,998806535	-0,0168236826
10	0,996419212	0,0777582800
15	0,986655738	0,1717650847

Şimdi de Jüpiterin Güneş merkezli koordinatlarına ihtiyacımız vardır. Bu koordinatların yukarıda olduğu gibi yalnız yedi an için değil fakat bütün integrasyon boyunca bilinmesi icab eder. Bereket versin ki bütün gezegenlerin koordinatları almanaklarda verilmektedir. Gerekli tarihler için bu koordinatlar bu almanaklardan temin edilir. Aşağıdaki tabloda bu değerlerin bize hazır olarak verildiğini kabul ediyoruz:

TABLO 2

Jüpiterin koordinatları

t	x'	y'
-15	-5,1565760403	0,6912385393
-10	-5,1614505363	0,6538467009
-5	-5,1660538970	0,6164205154
0	-5,1703858804	0,5789619488
5	-5,1744462593	0,5414729689
10	-5,1782348201	0,5039554491
15	-5,1817513642	0,4664116477
20	-5,1849957068	0,4288432495
.	.	.
.	.	.
280	-4,9789114631	-1,5094794460
285'	-4,9678403279	-1,5455258096

Son olarak yine ilk yedi an için roket üzerinde meydana gelen toplam çekimi hesap edeceğiz. Bunun için Tablo 1 ve 2 deki koordinatları (2) denklemlerinde yerlerine koyarız. Bulunan değerler aşağıdadır:

TABLO 3
Roket Üzerindeki Çekim

t	fx	fy
-15	-0,0066711454	0,0027604855
-10	-0,0069746730	0,0021539876
-5	-0,0072041719	0,0015042020
0	-0,0073517767	0,0008232264
5	-0,0074122601	0,0001248407
10	-0,0073834419	-0,0005762063
15	-0,0072663637	-0,0012650168

Şimdi (2) denklemlerinin sayısal çözümüne geçebiliriz. Her iki denklemi ayrı ayrı integre edeceğiz. Önce birinciden başlayalım:

1. $fx_{-3}, fx_{-2}, fx_{-1}, fx_0, fx_1, fx_2, fx_3$ ve x_0 değerlerini farklar tablosuna yerleştiriniz,

2. $f^1_{-5/2}, f^1_{-3/2}, f^1_{-1/2}, f^1_{1/2}, f^1_{3/2}, f^1_{5/2}, f^2_{-2}, f^2_{-1}, f^2_0, f^2_1, f^2_2, f^3_{-3/2}, f^3_{-1/2}, f^3_{1/2}, f^3_{3/2}, f^4_{-1}, f^4_0, f^4_1, f^5_{-1/2}, f^5_{1/2}, f^6_0$ farklarını bulunuz.,

$$3. 2f_0 = x_0 - \frac{1}{12} fx_0 + \frac{1}{240} f^2_0 - \frac{31}{60480} f^4_0.$$

$$1f_{1/2} = \omega \dot{x}_0 + \frac{1}{2} fx_0 + \frac{1}{12} \left(\frac{f^1_{-1/2} + f^1_{1/2}}{2} \right)$$

$$- \frac{11}{720} \left(\frac{f^3_{-1/2} + f^3_{1/2}}{2} \right) + \frac{191}{60480} \left(\frac{f^5_{-1/2} + f^5_{1/2}}{2} \right)$$

den $2f_0$ ve $1f_{1/2}$ değerlerini bulup tabloya yerleştiriniz.

4. $2f_1, 2f_2, 2f_3, 2f_4, 1f_{3/2}, 1f_{5/2}, 1f_{7/2}$ farklarını hesap ediniz.

$$5. x_1 = 2f_1 + \frac{1}{12} fx_0 + \frac{1}{12} f^1_{-1/2} + 0,0791667 f^2_{-1} + 0,075 f^3_{-3/2}$$

$$x_2 = 2f_2 + \frac{1}{12} fx_1 + \frac{1}{12} f^1_{1/2} + 0,0791667 f^2_0 + 0,075 f^3_{-1/2} \\ + 0,07135 f^4_{-1}$$

$$x_3 = 2f_3 + \frac{1}{12} fx_2 + \frac{1}{12} f^1_{3/2} + 0,0791667 f^2_1 + 0,075 f^3_{1/2}$$

+ 0,07135 f_4^0 + 0,0682 $f_{-1/2}^5$ den x_1, x_2 ve x_3 değerlerini hesap ediniz.

6. Bu x_1, x_2, x_3 değerleri ile birlikte, bunlara tekabül eden Jüpiterin x'_1, x'_2, x'_3 koordinatlarını (Tablo 2 de) kullanarak

$$f_x = 10^{-3} \omega^2 k^2 \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x}{r'^3} \right) - \frac{\omega^2 k^2}{r^3} x \text{ ten yeni}$$

f_{x_1}, f_{x_2} ve f_{x_3}

değerlerini bulunuz. Bu yeni değerleri farklar tablosunda eskilerinin yerine koyunuz ve 2. 3. 4. ve 5. adımlarını yeniden tekrarlayınız. Böylece yeni x_1, x_2 ve x_3 değerleri elde edeceksiniz. Eğer bu yeni değerler eski değerlere çok yakın değil ise iterasyona devam ediniz. Aksi halde 7. inci adıma geçiniz.

7. 5 inci adımın son denkleminde indisleri bir çoğaltarak

$$x_4 = 2f_4 + \frac{1}{12} f_{x_3} + \frac{1}{12} f_{15/2} + 0,0791667 f_{22} + 0,075 f_{33/2} + 0,07135 f_{41} + 0,0682 f_{51/2} + 0,065 f_6^0$$

denklemini ve buradan da x_4 değerini hesap ediniz.

8. Bu x_4 değerine karşılık gelen x'_4 değeri (Tablo 2) ile birlikte 6. da da olduğu gibi f_{x_4} değerini hesap ediniz, farklar tablosundaki yerine koyunuz, farklara aşağı doğru genişletiniz ve 7. deki indisleri birer artırarak x_5 değerini hesap ediniz.

9. Ve böylece integrasyona istediğiniz kadar devam ediniz.

10. x yerine y koyarak 1. den 9. a kadar olan işlemleri ikinci denklemin integrasyonu için uygulayınız.

Not. Sonuçlar sayfa 163 ve 164 de verilmektedir. Bu tablolarda kağıda sığması için farkların soldaki sıfırları yazılmamıştır. Bütün değerlerin on ondalıklı olduğuna dikkat ediniz.

t	x	² f	³ f	fx	f ¹	f ²	f ³	f ⁴	f ⁵	f ⁶
-15				0,0066711454—						
-10				0,0069746730—	3035276—					
-5				0,0072041719—	2294989—	740286				
0	0,9937889760	0,9944019886		0,0073517767—	1476047—	818942	78655	26385—		
5	0,9988015212	0,9994193964	0,0050174078	0,0074122601—	604834—	871212	52270	30466—	4081—	2325
10	0,9964089163	0,9970245441	0,0023948523—	0,0073834419—	288182	893017	21804	32221—	1755—	77—
15	0,9866403525	0,9872462498	0,0097782942—	0,0073834419—	1170782	882599	10417—	34053—	1832—	155609
20	0,9696124985	0,9702015918	0,0170446579—	0,0072663637—	2008907	838128	44471—	20324—	13729	23375—
25	0,9455254564	0,9460914592	0,0241101308—	0,0070654729—	2782240	773332	64795—	29971—	9646—	25431
				0,0067872488—		678566	94766—	14186—	15784	

