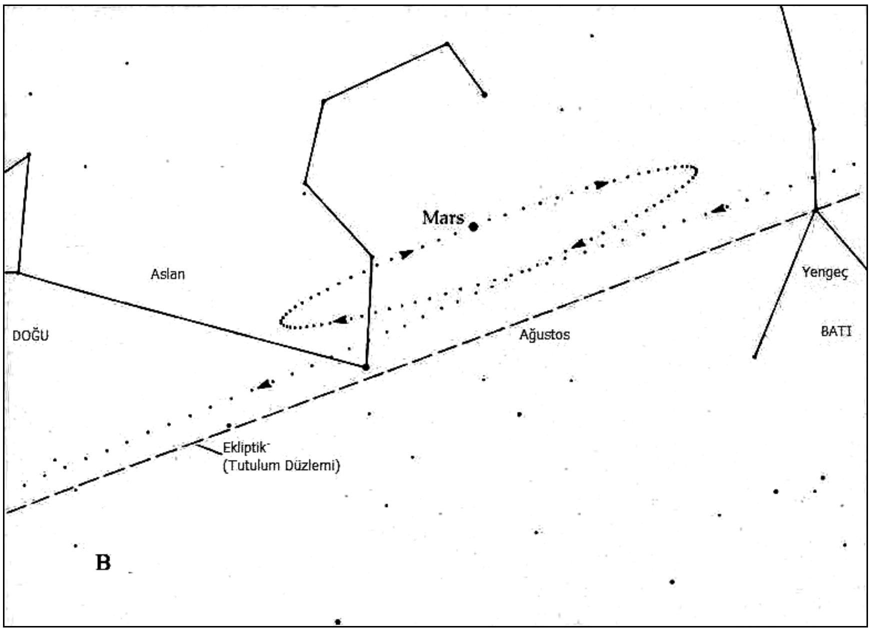
1.1. Bir dış gezegenin yörünge düzleminin ekliptikle arasındaki açının 10° olduğunu ve gezegenlerin kuzeye doğru hareket ederken karşı konumda ekliptiği kestiğini kabul ederek, bu dış gezegenin geri yöndeki hareketini gösteren şekli çiziniz.

C: Görünüm aynen Şekil.1.1'deki kesikli ilmeğe (loop'a) benzer şekilde olacaktır. Sadece, eğer gezegen tam karşı konumdayken gözleniyorsa bu ilmeğin ortası tutulum (ekliptik) üzerinde olacaktır. İlmeğin genişliği gezegenin Yer'e olan uzaklığına, ilmeğin yüksekliği ise yörüngesinin ekliptikle yaptığı açıya (bu örnekte 10 derece) bağlıdır.



Şekil 1.1: 1994-1995 yıllarında Mars gezegeninin Yer'den gözlenen – gökyüzündeki geri yönlü – **göreli** hareketi. Gezegenin göreli yolu Leo takım yıldızının yıldızlarına göre gösterilmiştir. Bu görünüş, 28°- 39° arasını kapsar. Şubat 1995'te Mars'ı geri hareketinin ortasında göstermektedir. Bu anda gezegen en parlaktır. Geri hareket l993 Aralıkta başlar ve Mart 1995'de biter.

1.2. Yer'i, Jüpiter gezegeninden gözlediğimizi düşünerek, Yer'in kavuşum dönemini hesaplayınız? Venüs'ü gözlemeniz halinde kavuşum dönemi ne olur?

C: $1/S = 1/P - 1/E$ formülü gereğince $P=365.26$ gün, $E=11.86$ yıl$=4332$ gün değerleri yerine yazılırsa Jüpiter ile Yer'in kavuşum dönemi $S=398.9$ gün bulunur. Eğer Jüpiter'den Venüs'ü gözlediğimizi düşünürsek $P=224.7$ gün, $E= 11.86$ yıl$= 4332$ gün değerleri yerine yazılırsa Jüpiter ile Venüs'ün kavuşum dönemi $S=237$ gün bulunur.

1.4. Yeryüzünün g çekim ivmesinin belirlendiği yöntemle, aşağıdaki gökcisimleri için aynı ifadenin alacağı değerleri hesaplayınız.

(a) Ay ($M_m=0.0123\ M_\oplus$, $R_m= 1738\ km$)
(b) Güneş ($M_\odot=2x10^{30}\ kg$, $R_\odot=7x10^{8}\ m$)
(c) Jüpiter ($M_J= 318\ M_\oplus$, $R_J=11.2\ R_\oplus$)

C : Formül: g = G.M$_{gez}$ / R$^2_{gez}$

$G = 6{,}67x\,10^{-11}\ m^3 / kg.s^2$

M$_{gez}$ $\rightarrow kg$ biriminde olacak

R$_{gez}$ $\rightarrow metre$ biriminde olacak

g (yüzey çekim ivmesi) $\rightarrow m/s^2$ biriminde olacak

İlgili kütle ve yarıçap değerleri yerine yazılırsa:

a) Ay ($M_{AY}= 0{,}0123.M_{YER}= 7{,}36x10^{22}\ kg$, $R_{AY}= 1738\ km$)

$$g_{AY} = 6{,}67\times10^{-11}\ \frac{m3}{kg.s^2}\cdot\frac{7{,}554\times10^{22}\,kg}{\left(1738\times10^3\right)^2 (m)^2} = \frac{4{,}906\times10^{12}\,m}{3{,}0206\times10^{12}\,s^2} = 1{,}62m/s^2$$

b) Güneş $= \left(M_\Theta = 2\times10^{30}\,kg,\ R_\Theta = 7\times10^8\,m\right)$

$$g_{GÜNEŞ} = 6{,}67\times10^{-11}\ \frac{m3}{kg.s^2}\cdot\frac{2\times10^{30}\,kg}{\left(7\times10^8\right)^2 (m)^2} = \frac{4{,}906\times10^{12}\,m}{3{,}0206\times10^{12}\,s^2} = 272{,}24\,m/s^2$$

c) Jüpiter $= \left(M_{jüp} = 318\ M_{yer} = 1{,}901\times10^{27}\,kg,\ R_{jüp} = 71435{,}84\ km\right)$

$$g_{jüp} = 6{,}67\times10^{-11}\ \frac{m3}{kg.s^2}\cdot\frac{1{,}901\times10^{27}\,kg}{\left(71435{,}84\times10^3\right)^2 (m)^2} = 24{,}84\,m/s^2$$

1.5. Merkür gezegeninin enberi ve enöte hızları nedir? Bu gezegenin enberi ve enöte uzaklıkları nedir? Enberi ve enöte noktaları için vr (hız x uzaklık) çarpımını hesaplayarak fiziksel sonucu üzerinde açıklama yapınız.

C: Gök mekaniğinden enberi ve enöte noktalarındaki yörünge hızları:

$$V_{enberi} = \frac{2\pi a}{p}.\sqrt{(1+e)/(1-e)}$$

$$V_{enöte} = \frac{2\pi a}{p}.\sqrt{(1-e)/(1+e)}$$

v.r (hız x uzaklık)'ın fiziksel sonucu, yörünge açısal momentumunun korunduğu anlamına gelmektedir.

Merkür gezegeninin yörüngesine ait yarı büyük eksen uzunluğu:

$$a_{merkür} = 0{,}3871\,AB = 58{,}07\times10^6\ km$$

Merkür gezegeninin yörünge periyodu:

$P_{merkür} = 87{,}96\ gün = 7{,}5997 \times 10^6$ s

Merkür yörüngesinin dış merkezliği (eksantrisitesi):

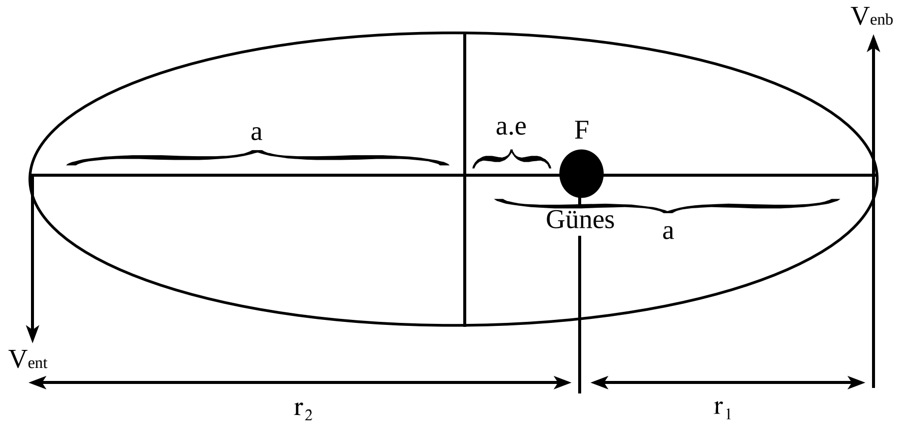
$e_{merkür} = 0{,}2056$

İşlem kolaylığı açısından iki denklemde de ortak olan $\frac{2\pi a}{P}$ 'yi belirleyelim:

$$\frac{2\pi \cdot 58{,}065 \times 10^6}{7{,}5997 \times 10^6\, sa} = 48{,}006\ km/s$$

$$V_{enberi} = 48{,}006 \cdot \sqrt{(1+0{,}2056)/(1-0{,}2056)} = 59{,}14\ km/s$$

$$V_{enöte} = 48{,}006 \cdot \sqrt{(1-0{,}2056)/(1+0{,}2056)} = 31{,}63\ km/s$$



$$\underset{\substack{\downarrow \\ enberi \\ uzaklıza}}{r_1} + \underset{\substack{\downarrow \\ enöte \\ uzaklıza}}{r_2} = 2a = 11{,}613 \times 10^7\ km$$

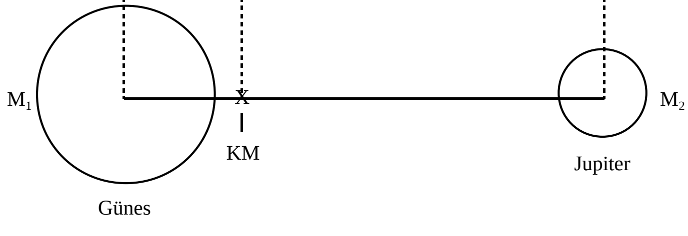
Yörüngesel açısal momentum $L(= mrv)$, yörüngenin her yerinde aynı olur, yani korunur.

$r_2 = r_{enöte} = a + a.e = 70{,}0 \times 10^6\ km$

$r_1 = r_{enberi} = a - a.e = 46{,}13 \times 10^6\ km$

1.6. (a) Güneş-Jüpiter ve **(b)** Yer-Ay sisteminin kütle merkezlerinin göreli konumlarını bulunuz?

C: a) Güneş – Jüpiter kütle merkezi (KM) konumu:



$M_1 = M_\Theta = 2 \times 10^{30}\, kg$

$M_2 = M_{jüp} = 1{,}901 \times 10^{27}\, kg$

$a = r_1 + r_2 = d_{gün-jüp} = 5{,}2028\ AB \cong 780{,}0 \times 10^6\, kg$

$r_1 + r_2 = a$ (Güneş-Jüpiter uzaklığı)

Statik gereğince $r_1.m_1 = r_2.m_2'dir.$ Buradan:

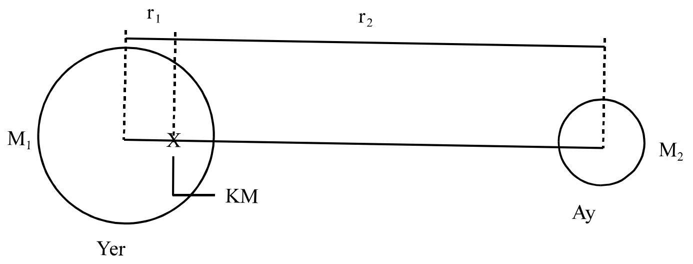
$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ formülü kütle merkezinin yerini verecektir.

$$\rightarrow \frac{r_1}{780{,}0\times10^6 - r_1} = \frac{1.901\times10^{27}}{2\times10^{30}}$$

$$\rightarrow \frac{r_1}{780{,}0\times10^6 - r_1} = 9{,}505\times10^{-4} \quad \Rightarrow \xrightarrow{r_1=741065{,}90\ km}$$ çıkacaktır.

Yani KM Güneş'in fotosferinin (ışık küresinin) hemen dışında ve Güneş'e çok yakındır.

b) Yer – Ay kütle merkezi konumu;



$$a = r_1 + r_2 = d_{ay} = d_{ay-yer} = 384405\ km$$
$$M_{yer} = 5{,}98\times10^{24}\ kg$$
$$M_{ay} = 7{,}36\times10^{22}\ kg$$

$$\rightarrow \frac{r_1}{384405 - r_1} = \frac{7.36\times10^{22}}{5{,}98\times10^{24}}$$

$$\rightarrow \frac{r_1}{384405 - r_1} = 0{,}0123 \quad \Rightarrow \xrightarrow{r_1=4670{,}73\ km}$$ Yani bulunan KM değeri, Yer-Ay sisteminin kütle merkezinin Dünya'nın içinde olduğunu gösterir.

1.7. Yıldızıl dönemi tam 24 saat olan bir televizyon uydusu Yer etrafında dairesel bir yörüngede dolanmaktadır. Bu uydunun Yer yüzeyinden olan uzaklığı ne kadardır? (İpucu: Kepler yasalarını kullanın). Eğer uydu, yüzeyde bulunan bir gözlemciye göre sabit bir şekilde duruyor ise yörünge düzleminin yönelimi ne şekildedir?

C: Düzenlenmiş 3.Kepler yasasına göre $\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$ dir. M_1 Yer kütlesi olarak, M_2 ise uydu kütlesi (ihmal edilebilir) alınırsa, *P=24 saat=86400 s* alınırsa buradan *a= 42 300 km* bulunur. Yani televizyon uyduları ortalama *40 000 km* uzaklığa yerleştirilirse Yer ile aynı sürede (24 saat) dolanırlar. Bu uyduların yörünge düzlemi yönelimi Yer ekvatoru ile çakışıktır.

1.8. Titan uydusuna ilişkin yörünge parametrelerini kullanarak, Satürn gezegeninin kütlesini hesaplayınız.

C: Yine bir önceki sorudaki Kepler yasası kullanılırsa M_1 Satürn kütlesi, M_2 Titan'ın kütlesi (ihmal edilebilir), *a_{Titan}=1221870 km* ve *P_{Titan}=15,945 gün* değerleri kullanılırsa, *$M_{Satürn}$=5.7x10^{26} kg= 95 M_{Yer}* bulunur.

1.9. Ay'ın yörüngesi üzerindeki herhangi bir noktadan bir taş Yer'e doğru serbest düşmeye bırakılmaktadır. Bu taş Yer merkezinden *192 000 km* uzaklıkta iken hızı ne kadardır?

C: Zamana bağlı olmayan serbest düşme kinematik hız formülü $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$ şeklindedir. Burada v_0= *0* alınırsa ve y-y_0= *384000 km - 192000 km = 192000 km* (yani Yer-Ay mesafesinin ortasında) *v= 61 376 m/s = 61,4 km/s* bulunur.

1.10. Kavuşum dönemi *S = 1,5 yıl* olan bir cisim Yer'den gözlenmektedir. Bu cismin yörüngesine ilişkin yarı-büyük eksen uzunluğu için olası iki farklı değeri hesaplayınız?

C: Kavuşum dönemi *1,5 yıl* olduğundan bu bir dış gezegendir. Dış gezegenler için verilen, *1/S = 1/E – 1/P* eşitliğinden bu gezegen için *P=1095,75 gün= 3 yıl* bulunur. Düzenlenmemiş Kepler yasası $\frac{a^3}{P^2} = M_1 + M_2$ eşitliğinde (M_2 gezegen kütlesi, M_1 Güneş kütlesi yanında ihmal edilirse ve *M_1= 1 br* alınırsa) *a=2,08 AB* bulunur. Yörüngesinin oldukça basık bir elips olduğunu varsayarak *e=0,9* alalım. Bu durumda;

$$r = a(1 - e^2) / (1 + e \cos \theta) \qquad (1.3)$$

eşitliğinden *r_{enberi}=0,208 AB* ve *$r_{enöte}$=3,952 AB* bulunur.

1.11. Yer'in yörünge öğelerini kullanarak, Güneş'in kütlesini belirleyiniz Bu hesapta Yer'in kütlesi önemli midir?

C: Kullanılacak formül düzenlenmiş 3. Kepler Yasası'dır.

$$\frac{G.(M_1 - M_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{p^2}$$

$a \rightarrow$ Yarı büyük eksen uzunluğu, $P \rightarrow$ Dolanma dönemi, M_1 *ve* $M_2 \rightarrow$ Cisimlerin kütleleri

$G \rightarrow 6{,}67 \times 10^{-11} \; m^3 / kg.s^2$ Evrensel Çekim Sabiti

$$M_{yer} = 7{,}3554 \times 10^{24} \, kg$$

$$a_{yer} = 150000000 \, km = 15 \times 10^{10} \, m$$

$$P_{yer} = 1 \, yil \cong 365 \, gün = 3{,}153 \times 10^7 \, s$$

$$\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (M_\Theta + M_{yer})}{4\pi^2} = \frac{(15 \times 10^{10})^3}{(3{,}153 \times 10^7)^2}$$

$$M_\Theta + M_{yer} = \frac{4.\pi^2 .3{,}375 \times 10^{33} m^3}{6{,}63 \times 10^4 sn^2 m^3 .kg.s^2}$$

$$M_{\Theta} + M_{yer} = 2{,}01 \times 10^{30}\, kg$$

$M_{\Theta} \rangle\rangle M_{yer}$ olması sebebi ile (>>: çok çok büyük) yerin kütlesi göz ardı edilebilir. Böylece:

$M_{\Theta} \cong 2{,}01 \times 10^{30}\, kg$ olarak bulunur.

1.12. Kendinizle aşağıdaki cisimler arasındaki karşılıklı çekim kuvvetini karşılaştırınız.
(a) *100 kg* kütleli ve *1 m* uzaklıkta bir başkası
(b) Karşı konumda (Yer'e en yakın konumda) iken Mars gezegeni. Sonuçları tartışınız.

C: a) Kendi kütlemiz $M_1 = 80\ kg$ olsun. Diğer kişinin kütlesi $M_2 = 100\ kg$ olarak verilmiş. Aradaki mesafe $d = 1\ m$ olacağına göre genel kütle çekim yasasından:

$F_{çekim} = GM_1.M_2/d^2 = 6{,}67x10^{-11}.80.100 / 1^2 = 5{,}3x10^{-7}\ N$ bulunur.

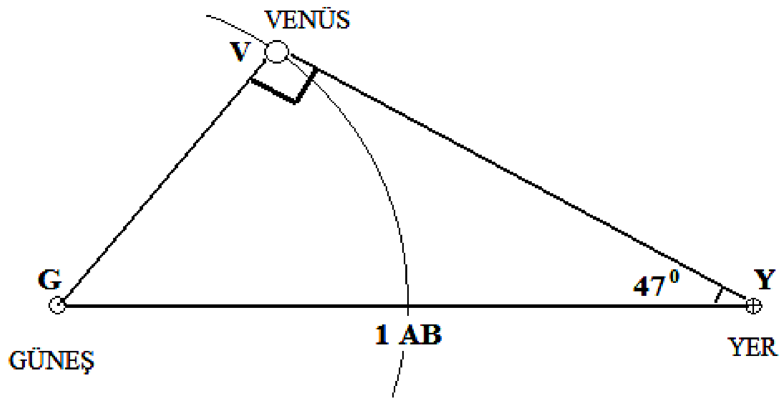
b) Mars'ın kütlesi $M_1 = 6{,}42x10^{23}\ kg$ ve üst kavuşumda (Yer'e en yakın) iken uzaklığı $d \approx 0{,}52\ AB = 7{,}77x10^{10}\ m$ alarak kütle çekim yasasından:

$F_{çekim} = GM_1.M_2/d^2 = 6{,}67x10^{-11}.\ 6{,}42x10^{23}.80 / (7{,}77x10^{10})^2 = 5{,}67x10^{-7}\ N$ bulunur.

Görüldüğü gibi, 1 m uzağımızdaki 100 kg kütleli bir insanın üzerimize uyguladığı kütle çekim kuvveti, Mars gezegeninin Yer'e **en yakın** konumdayken uyguladığı çekim kuvveti ile kıyaslanabilir büyüklüktedir!

1.13. Venüs'ün en büyük uzanımı *47°* dır. Bu konumda iken Güneş'ten olan uzaklığı *AB* cinsinden ne kadardır?

C: Şekilden de görüldüğü gibi, bir gezegen en büyük uzanımına ulaştığında oluşan üçgen bir **dik** üçgendir. Bu dik üçgenin çözümünden: $|VG| = |GY|.Sin(47^0) = 1.0{,}73 = 0{,}73\ AB$ olarak Güneş-Venüs uzaklığı bulunur. *1 AB* (Yer-Güneş uzaklığı) = $149\ 500\ 000\ 000\ m = 1{,}495x10^{11}\ m$ olduğuna göre, Güneş-Venüs uzaklığı da $\sim 1.1x10^{11}\ m$ olarak bulunur.



2.3. Mars'ın uydularından Phobos ve Deimos'un Kepler'in yasasına uyduğunu gösterin ve bu uyduların yörüngelerinden yararlanarak Mars'ın kütlesini hesaplayın.

C: Phobos uydusundan:

$M_{Phobos} = 1{,}07\times10^{16}\ kg\ ,\ a_{Phobos} = 9377{,}2\ km = 9377200\ \ m\ ,\ P_{phobos} = 7{,}67\ saat = 27612\ \ s$

3. Kepler yasasını kullanırsak:

$$\frac{G.(M_1+M_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{p^2}\ ,\ G = 6{,}67\times10^{-11}\ m^3/kg.s^2$$

$$\frac{6.67\times10^{-11}.(M_{mars}+1{,}07\times10^{16})}{4\pi^2} = \frac{(9377200)^3}{(27612)^2}$$

M_{mars}'ı denklemde çekip, çözersek:

$M_{mars} = 6{,}39\times10^{23}\ kg$ bulunur.

Deimos uydusundan:

$M_{Deimos} = 1{,}08\times10^{15}\ kg\ ,\ a_{Deimos} = 23400\,km = 23400000\ m\ ,\ P_{Deimos} = 30{,}3\ saat = 109080\ s$

$$\frac{G.(M_1+M_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{p^2}\ ,\ G = 6{,}67\times10^{-11}\ m^{3/}/kg.s^2$$

$$\frac{6{,}67\times10^{-11}(M_{Mars}+1{,}9\times10^{16})}{4\pi^2} = \frac{(23400000)^3}{(109080)^2}$$

M_{mars}'ı denklemden çekip, çözersek:

$M_{mars} = 6.39\times10^{23}\ kg$ bulunur.

Yorum:

Her iki uydu için elde edilecek a^3/p^2 oranı aynı çıkmaktadır ki, Kepler'in Güneş sistemindeki gezegenlerin hareketlerinden bulduğu sonuçta da $\frac{a^3}{p^2} = sbt$ şeklinde çıkmaktaydı. Dolayısıyla Mars'ın uyduları da – doğal olarak – Kepler Yasasına uygun bir şekilde dolanmaktadırlar.

2.4. (a) Kütlesi 10^3 kg olan bir uzay gemisinin (u.g.) Yer ekvatorundaki ve kutuplardaki ağırlığını hesap ediniz (İpucu: Merkezcil çekim kuvvetini düşününüz).

(b) Jüpiter'in hızlı döndüğünü hatırlayarak bu uzay aracının Jüpiter'in ekvatorunda ve kutuplarında ne ağırlıkta olacağını bulunuz.

C: a) $M_{u.g.} = 10^3\ kg$ verilmiş, $W_{u.g.}$ (ekvator) ve $W_{u.g.}$ (kutup) isteniyor.

$G = 6{,}67\times10^{-11}\ m^3/kg.s^2$ ve $M_{yer} = 5{,}98\times10^{24}\ kg$

Öncelikle ekvator ve kutup için kütle çekim ivmelerini bulalım:

$$g_{ekvator} = \frac{G.M_{\Theta}}{\left(R_{\Theta\ Ekv}\right)^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}98\times10^{24}\ kg}{\left(6385{,}8\times10^{3}\ m\right)^2} = 9{,}781\, m/s^2$$

$$g_{kutup} = \frac{G.M_{\Theta}}{\left(R_{\Theta\ kutup}\right)^2} = \frac{3{,}98\times10^{14}\ m^3/sn^2}{\left(6369{,}3\times10^{3}\ m\right)^2} = 9{,}832\ m/s^2$$

$W_{ekv.u.g.} = 10^3\ kg\cdot 9{,}781\, m/s^2$ $\quad\quad$ $W_{kutup,u.g.} = 10^3\ kg\cdot 9{,}832\ m/s^2$

$= 9871\, kg\ \ m/s^2 = 9871\ \ N$ $\quad\quad$ $= 9832\ kg\ m/s^2 = 9832\ N$

Ekvator Ağırlığı $\quad\quad$ Kutup Ağırlığı

b) $M_{jup} = 1{,}901\times10^{27}\ kg$. Basıklık formülü ile Jüpiter'in kutup yarıçapını bulalım:

$\varepsilon_{jüp.}$ (basıklık) = 0,062'dir.

$R_{ekv.jup} = 71{,}5\times10^5\ km$

$\varepsilon = \left(r_{ekv} - r_{kutup}\right)/\,r_{ekv}$

$0{,}062 = \left(71{,}5\times10^3 - r_{kutup}\right)/\,31{,}5\times10^3 = r_{kutup} = 67{,}06\times10^3\ km$

$$g_{ekv} = \frac{G.M_j}{\left(R_{j\ ekv}\right)^2} = \frac{6{,}67\times10^{11}\cdot1{,}901\times10^{27}}{\left(71{,}5\times10^{6}\ m\right)^2} = 24{,}8\ m/s^2 \Rightarrow W_{ekv} = 10^3\ kg.24{,}8 = 24800\ N$$

$$g_{kutup} = \frac{G.M_j}{\left(R_{j\ kutup}\right)^2} = \frac{6{,}67\times10^{11}\cdot1{,}901\times10^{27}}{\left(67{,}06\times10^{6}\ m\right)^2} = 28{,}19\ m/s^2 \Rightarrow W_{kutup} = 10^3\ kg.28{,}19 = 28190\ N$$

Yorum: Farkın Yer'e göre çok daha fazla olduğunu görebiliriz. Bu sonuç Jüpiter gezegeninin Yer'e nazaran daha basık bir yapıda olmasının bir sonucudur.

2.7. Yer'deki sıcaklığa benzer bir sıcaklık elde edebilmek için aşağıdaki yıldızlardan ne kadar uzakta (AB cinsinden) olmamız gerekirdi.
(a) Rigel (yüzey sıcaklığı T= *12000°K*, yarıçapı *R=35* $R_{\odot}$)?
(b) Barnard Yıldızı (*T= 3000°K, R= 0.5* $R_{\odot}$) ?

C:

a) Rigel yıldızı için:

$T_{rigel} = 12000^o\,K$

$R_{rigel} = 35R_{\Theta} = 35700000\ \ km = 24{,}5\times10^6\, km$

a: Yer-Güneş arası ortalama mesafe

R_{Θ} : Güneş yarıçapı

T_{Θ} : Güneş sıcaklığı

Önce Güneş sabitini bulalım: Güneş Sabiti $\left(E_T\right)$ = Yer atmosferinin dışına, Güneş'ten birim zamanda birim yüzeye gelen toplam enerjidir.

$E_0 = E_T \cdot \frac{a^2}{R_\Theta^2}$; $E_0 = \sigma . T^4$, burada $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W/m^2.K^4$ Stefan-Boltzmann sabiti olmak üzere

$$E_\Theta = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W/m^2.K^4.\underbrace{(5800)^4}_{T_\Theta}\ K^4 = 6{,}4 \times 10^7\ W/m^2$$

$$6{,}4 \times 10^7\ W/m^2 = E_T \cdot \frac{150000000^2}{700000^2} \Rightarrow E_T = 1{,}393 \times 10^3\ W/m^2$$

Güneş yerinde Rigel olsaydı;

$$\mathrm{E_{rigel}} = \mathrm{E_T} \cdot \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{R}^2_{\mathrm{rigel}}},\ \mathrm{E_{rigel}} = \sigma.(12000)^4 = 1{,}175 \times 10^9\ \mathrm{W/m^2}$$

$$1{,}175 \times 10^9\ W/m^2 = 1{,}393 \times 10^3\ W/m^2 \cdot \frac{a^2}{6{,}002 \times 10^{14}\ km^2}$$

$$a^2 = 5{,}062 \times 10^{20}\ km^2 \Rightarrow a = 2{,}25 \times 10^{10}\ km \cong 150\ AB$$

b) Barnard yıldızı için:

$T_{Barnard} = 3000^o\,K$

$$E_{Barnard} = E_T \cdot \frac{a^2}{R_{Barnard}}$$

$R_{Barnard} = 0{,}5\ R_\Theta$

$$5{,}67 \times 10^{-8} \cdot (3000)^4 = 1{,}393 \times 10^3 \cdot \frac{a^2}{(350000)^2}$$

$$a^2 = 4{,}038 \times 10^{14} \Rightarrow a = 20{,}09 \times 10^6\ km = 0{,}13\ AB$$

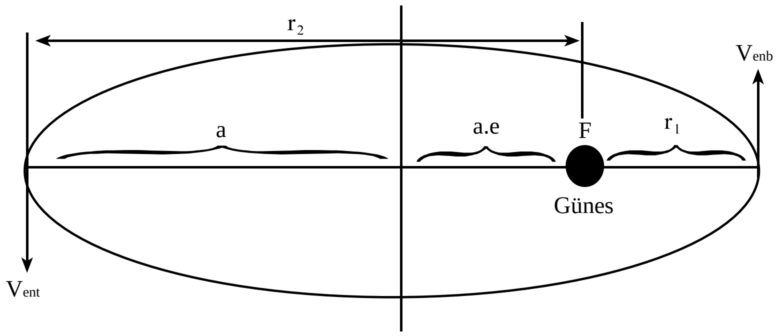
2.9. En öte uzaklığı *5xl0⁴ AB* ve yörünge basıklığı *e= 0.995* olan bir ky'ı gözönüne alarak;

(a) Enberi noktasının uzaklığı ve dolanma dönemi nedir?

(b) Enberi ve enöte noktalarındaki hızı nedir?

(c) Enöte noktasında iken Güneş Sisteminden kaçma hızı ne kadardır? Bundan nasıl bir sonuç çıkarmak mümkündür?

C:



$r_2 = 5 \times 10^4\ AB$, $e_{ky} = 0{,}995$

a) İstenenler $r_1 = ?$ ve $P_{ky} = ?$

$e = 0{,}995 ve\ r_2 = 5\times10^4\ AB = 7{,}5\times10^{15}\,m$ olarak verilmiş

Önce şekildeki geometriden yarı büyük eksen uzunluğunu belirleyelim;

$r_2 = a + a.e$

$5\times10^4\ AB = a + 0{,}995a$

$5\times10^4\ AB = 1{,}995a \Rightarrow\ a = 25{,}06\times10^3\ AB \quad a = 3{,}75\times10^{15}\,m$

$r_1 = a - a.e$

$= 25{,}06\times10^3 - 24{,}93\times10^3\ \Rightarrow\ r_1 = 130\ AB$

P_{ky} Kepler'in 3. yasasından;

$$\frac{G.(M_1 + M_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{P^2} \Rightarrow \frac{6{,}67\times10^{-11}.\overbrace{2\times10^{30}}^{M_\Theta}}{4\pi^2} = \frac{(5{,}30\times10^{46}\,m)}{P^2}$$

$P_{ky} = 1{,}25\times10^{14} \cong 4\times10^6\ yıl$

b) Enberi ve enöte hızları; $v_{enb} = \dfrac{2\pi a}{P}.\sqrt{1+e/1-e}$, $v_{enöte} = \dfrac{2\pi a}{P}.\sqrt{1-e/1+e}$

$$v_{enb} = \frac{2{,}36\times10^{16}\,m}{1{,}25\times10^{14}\,sn}\cdot 19{,}9 = 3773{,}2\ m/s, \qquad v_{enöte} = \frac{2{,}36\times10^{16}\,m}{1{,}25\times10^{14}\,s}$$

$v_{enb} = 3773{,}2\ m/s \qquad\qquad v_{enöte} = 9{,}45\ m/s$

c) $v_{Kaçma} = \sqrt{\dfrac{2.G.M.}{r_2}} = \sqrt{\dfrac{2.6{,}67\times10^{-11}.2.10^{30}}{7{,}5\times10^{15}\,m}} = 188{,}6\ m/s$

Yorum: $v_{enöte}$ hızı, enöte noktasındaki kaçma hızından küçük olduğu için, kuyruklu yıldız Güneş'in çekim alanından çıkamaz.

2.20. Yer benzeri iç gezegenlerin atmosferlerinde az miktarda H olduğu halde (Jüpiter benzeri) dış gezegenlerinkinde bol miktarda H gazı vardır. Her sınıfın tipik örneği olarak Yer ve Jüpiter'i alarak, her ikisi için H moleküllerinin karekök hızının (v_{rms}) kaçma hızına oranını hesap ediniz. Bu değerler bu gezegenlerde gözlenen göreli H bolluğuna nasıl etki eder?

C: $v_{rms} = (3kT/m)^{1/2}$, kaçış (escape) hızı ise $v_e = \sqrt{2.G.M./R}$ 'dir.

Şayet $\frac{v_{rms}}{v_e} \leq 0{,}1$ olursa ilgili gaz gezegen atmosferinde sonsuza dek kalır. Aksi halde atmosferi terk eder.

m= Gazın kütlesi, T= Gazın bulunduğu ortamın sıcaklığı (gezegenin ortalama yüzey sıcaklığı), K= Boltzmann sabiti=$1{,}38\times10^{-23}\ J/K$, G= Evrensel çekim sabiti $=6{,}67\times10^{-11}\ m^3/kg.s^2$, M= Gezegenin kütlesi, R= Gezegenin yarıçapı, Hidrojen atomunun kütlesi= $M_H = 1{,}6735\times10^{-27}\ kg$.

H atomu için, Yer'e göre hesap yaparsak:

$$v_{rms\,(Yer)} = \sqrt{\frac{3.1{,}38\times10^{-23}.290^O K}{1{,}6735\times10^{-27}\ kg}} = 2{,}67\times10^3\ m/s$$

$$\frac{v_{rms(Yer)}}{v_{e(Yer)}} = \frac{2{,}67\times10^3}{11{,}18\times10^3} = 0{,}238$$

$$v_{e\,(Yer)} = \sqrt{\frac{2.6{,}667\times10^{-11}.5{,}98\times10^{24}kg}{6378000\ m}} = 11{,}18\times10^3\ m/s$$

Yer için sonuç: 0,238, eşik değer olan 0,1'den büyük olduğu için Yer Hidrojen gazını tutamamıştır.

H atomu için Jüpiter'e göre hesap yaparsak:

$$v_{rms\,(Jüp)} = \sqrt{\frac{3.1{,}38\times10^{-23}/20}{1{,}6735\times10^{-27}\ kg}} = 1{,}72\times10^3\ m/s$$

$$\frac{v_{rms(Jüp)}}{v_{e(Jüp)}} = \frac{1{,}72\times10^3}{118{,}4\times10^3} = 0{,}014$$

$$v_{e\,(Jüp)} = \sqrt{\frac{2.6{,}667\times10^{-11}\ \ 1{,}901\times10^{27}\ kg}{71435840\ m}} = 188{,}4\times10^3\ m/s$$

Jüpiter için oran 0,014 çıkmaktadır, yani eşik değer olan 0,1'den küçük olduğu için Hidrojen Jüpiter'in atmosferinde kalacaktır.

2.22. Halley kuyruklu yıldızı (ky)'nın dolanma dönemi *76 yıl*, yörüngesinin basıklığı ise *e= 0,967*'dir.

(a) Bu ky'ın enberi ve enöte noktalarının uzaklıkları ne kadardır?

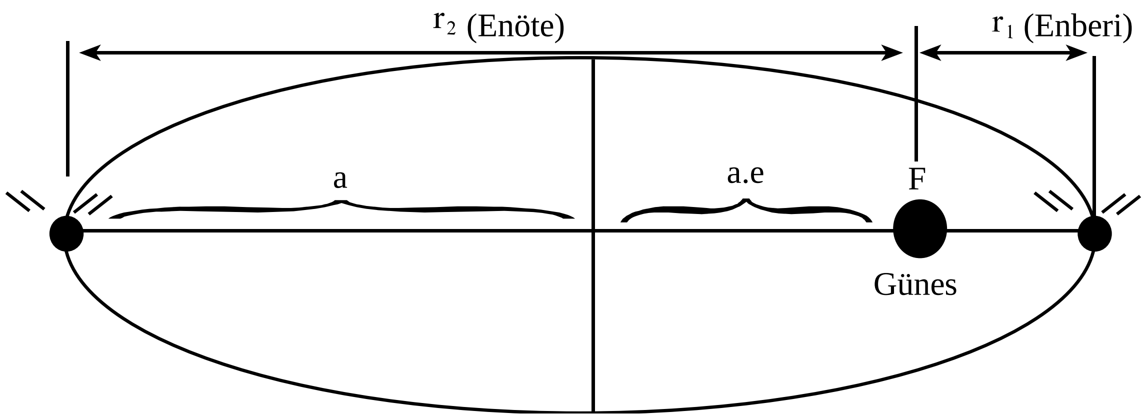
(b) Bu ky enberi ve enöte noktasında iken Güneş'in ky üzerinde oluşturacağı sıcaklık ne olur?

(c) Halley ky'nın albedosu %3 olduğuna göre enberi ve enöte noktalarında iken dengedeki karacisim sıcaklığı ne olur?

C: $P_{halley} = 76\ yıı = 2{,}39 \times 10^{9}\ s$ ve $e_{halley} = 0{,}967$ olarak veriliyor.

a) r_1 ve r_2 uzaklıkları isteniyor. Verilen dönem ile Kepler'in 3. yasasından yarı büyük eksen uzunluğuna geçeriz.

$$\frac{G(M_1 + M_\Theta)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{(2{,}39 \times 10^9)^2} \Rightarrow a = 17{,}86\ AB$$



$$r_1 = a - a.e = 17{,}86 - 17{,}86 \cdot 0{,}967 = 0{,}58\ AB$$

$$r_2 = a + a.e = 17{,}86 + 17{,}86 \cdot 0{,}967 = 35{,}13\ AB$$

b) $E_\Theta = E_{halley} \cdot \frac{a^2_{halley}}{R_\Theta}$, $E_{halley} = \sigma . T^4_{halley}$ Burada yüzey sıcaklığı T_{halley}'i bulacağız.

$E_\Theta\ ve\ R_\Theta$ bilindiği için denklemi daha sade yazalım:

$$\frac{E_\Theta R_\Theta}{(r_1)^2} = E_{H,\,enberi} \Rightarrow \frac{3{,}14 \times 10^{19}}{7{,}569 \times 10^{15}} \Rightarrow E_{Halley\ enberi} = 4{,}14 \times 10^{3}\ W/m^2$$

$4{,}14 \times 10^{3} = 5{,}67 \times 10^{-8} . T^4_{H,\,enb} \Rightarrow T = 519{,}80^{o}\,K$ enberide iken Güneş'in ky üzerinde oluşturacağı sıcaklık

$$\frac{E_\Theta R_\Theta}{(r_2)^2} = E_{H,\,enöte} = \frac{3{,}14 \times 10^{14}}{2{,}77 \times 10^{14}} = 1{,}134\ W/m^2$$

$1,134 = 5,67 \times 10^{-8} \ T^4_{H,\, enöte} \Rightarrow T = 66,86^o K$ enötede iken Güneş'in ky üzerinde oluşturacağı sıcaklık

c) Albedosu %3 ise yani *A*= 0,03 alarak $T = 394(1/A)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_p}}$ formülüne uygularız:

Burada r_p : AB biriminde Güneş-gökcismi uzaklığıdır.

$T_{enb} = 394.(1-0,03).\frac{1}{\sqrt{0,58}} \Rightarrow T_{enb} = 501,83^o K$ Denge durumundaki kara-cisim sıcaklığı

$T_{enöte} = 394.(1-0,03).\frac{1}{\sqrt{35,13}} \Rightarrow T_{enöte} = 64,48^o K$ Denge durumundaki kara-cisim sıcaklığı

---

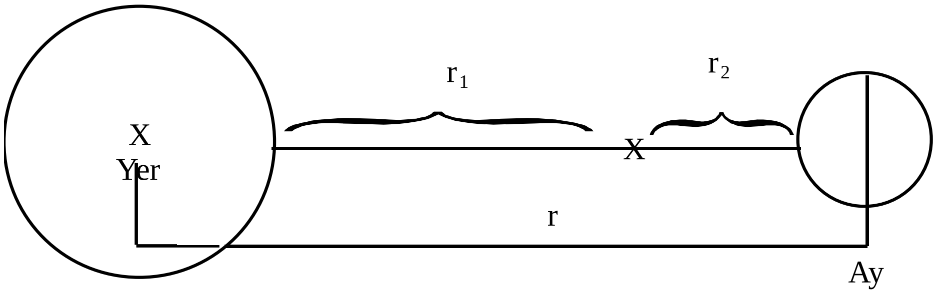
4. BÖLÜM : YER-AY SİSTEMİ

4.1. Apollo uzay gemisi Ay'a doğru gitmektedir. Apollo ile Dünya arasında hangi noktada net çekim ivmesi sıfır olur?

C: Çekim ivmesi $g = \frac{G.M}{r^2}$ 'dir.

Çekim ivmesinin sıfır olması için kütle çekim ivmelerinin birbirlerine eşit olması gerek

$g_{yer} = g_{ay}$



$M_{yer} = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$

$M_{Ay} = 7{,}36 \times 10^{22}\ kg$

$r_1 + r_2 = r =$ Yer – Ay uzaklığı = 384405 km

$$\frac{G.M_{yer}}{r_1^2} = \frac{G.M_{ay}}{r_2^2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{M_{yer}}{M_{Ay}}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{5{,}98 \times 10^{24}}{7{,}36 \times 10^{22}}} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 9{,}0138$$

$r_1 = 9{,}0138 \cdot r_2$, $r_1 + r_2$ denkleminde yerine konulursa:

$$r_2 + 9{,}0138 \cdot r_2 = 384405\ km \quad \Rightarrow \quad r_2 = \underbrace{38387{,}5\ km,\ r_1 = 346017{,}5\ km}_{\text{Uzaklıklarında çekim ivmesi 0 dır}}$$

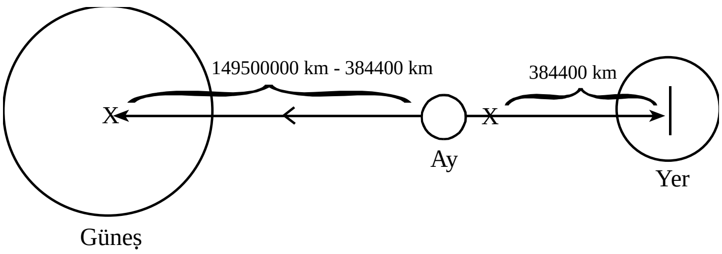
4.3. Ay yörüngesinin dairesel ve ekliptik (tutulum) düzlemi üzerinde olduğunu varsayarak; Güneş'in, Ay'ın karşı konumda ve iç kavuşum konumlarındaki çekim kuvveti arasındaki farkı bulunuz. Bu değeri Yer'in çekimsel etkisi ile karşılaştırınız. Ay'ın yörüngesinin neden basit bir eliptik yörünge olmadığını anlayabildiniz mi?

C:

$$M_{\Theta} = 2\times10^{30}\,kg$$
$$M_{ay} = 7{,}35\times10^{22}\,kg$$
$$M_{yer} = 5{,}98\times10^{24}\,kg$$
$$R_{ay} = 1738\ km$$

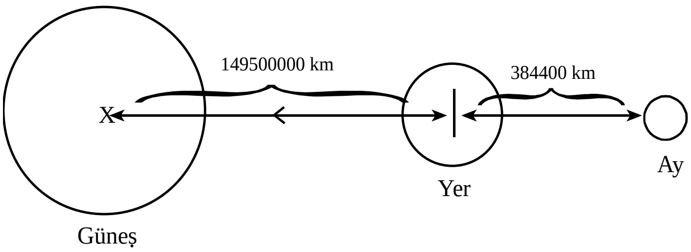
İç kavuşumda (yani Yeniay evresinde), Güneş'in Ay'a uyguladığı çekim kuvveti:

$$F_{1,\Theta} = \frac{GM_{\Theta}.M_{Ay}}{\left((149500000-384400)\times10^{3}\,m\right)^{2}}$$
$$F_{1,\Theta} = 4{,}4\times10^{20}\,N$$



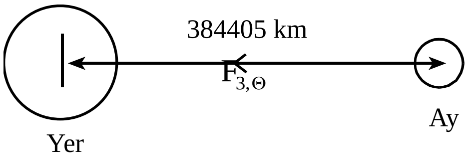
Karşı konumda (yani Dolunay evresinde), Güneş'in Ay'a uyguladığı çekim kuvveti:

$$F_{2,\Theta} = \frac{GM_{\Theta}.M_{Ay}}{\left((149{,}5\times10^{6}+384{,}4\times10^{3})\times10^{3}\,m\right)^{2}}$$
$$F_{2,\Theta} = 4{,}36\times10^{20}\,N$$



Yer'in Ay'a uyguladığı çekim kuvveti ise:

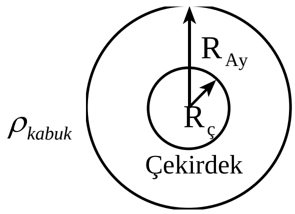
$$F_{3,\Theta} = \frac{GM_{\Theta}M_{Ay}}{\left(384{,}4\times10^{6}\,m\right)^{2}} = 2\times10^{20}\,N$$



Ay üzerine Güneş'in uyguladığı kütle çekim kuvveti Yer'inkinin yaklaşık 2 katıdır. Ay'ın Yer ile birlikte Güneş çevresinde dolanması sonucu doğan merkezcil ivme nedeniyle, Ay Yer'in çekim alanından çıkmamaktadır.

4.4. (a) Ay çekirdeğinin yarıçapı $R_{AY}/10$ ise ve bu yarıçapın üzerinde kalan maddenin eş yoğunluklu bir yapıda (ρ = *3000 kg/m*^{3}) olduğunu kabul ederek, çekirdeğin eş yoğunluklu olması durumunda yoğunluğu ne olmalıdır?
(b) Yer'in Ay üzerindeki gelgit kuvvetini, yörüngenin enberi ve enöte noktası için hesaplayınız ve bulduğunuz sonucu yorumlayınız?

C: a) $R_{çekirdek} = 1735/10 = 173{,}8\ km$, $M_{AY} = 7{,}36x10^{22}\ kg$



$R_ç = 0{,}1 \times R_{Ay}$

$\rho_{kabuk} = 3000\ kg/m^3$

Kabuk (ya da manto) kısmının kütlesini hesaplayalım:

$$M_{kabuk} = \rho_ç.\frac{4}{3}\pi R_A^3 - \rho_ç.\frac{4}{3}\pi R_ç^3 = \rho_ç\frac{4}{3}\pi\left(R_A^3 - R_ç^3\right) = 3000.\frac{4}{3}\pi\left[\left(1738\times10^3\right)^3 - \left(173{,}8\times10^3\right)^3\right]$$

$$M_{kabuk} = 6{,}6\times10^{22}\ kg;$$

$$M_{çekirdek} = M_{Ay} - M_{kabuk} = 7{,}6\times10^{21}kg$$

Buradan çekirdeğin yoğunluğu:

$$\rho_ç = \frac{M_ç}{\frac{4}{3}\pi R_ç^3} \qquad \rho_ç = \frac{7{,}6\times10^{21}}{\frac{4}{3}\pi\left(173{,}8\times10^3\right)^3}$$

$\rho_ç = 3{,}5\times10^5\ kg/m^3$; çıkmaktadır ki bu sonuç, Yer'in 10^4 *kg/m*^{3}'lük çekirdek yoğunluğu ile kıyaslandığında, *gerçekçi* bir değer *olmadığı* görülür! O halde Ay'ın çekirdeği dışındaki madde eş yoğunluklu, yani ρ= *3000 kg/m*^{3} değerine sahip **değildir**.

b) Yerin Ay üzerine uyguladığı **dik** yöndeki çekim ivmesi:

$B = GM_{uyg.}\left(\frac{r - R_{uyg.}.Cos\phi}{r^3}\right)$; Burada ϕ enlemini 0^0, yani Ay'ın ekvatorunda alarak işlem yapalım: $B_{\substack{yer-Ay\\enberi}} = 6{,}67\times10^{-11}.5{,}98\times10^{24}\left(363263000 - 1738000/363263000^3\right)$

$$= 3{,}008\times10^{-3}\ m/s^2$$

$$B_{\substack{yer-ay\\ enöte}} = 6{,}67\times10^{-11}.5{,}98\times10^{24}\left(405547000-1738000/4055477000^3\right)=2{,}414\times10^{-3}\ m/s^2$$

Enberi ve en öte noktalarındaki çekim ivmelerini oranlarsak:

$$\frac{B_{yer-ay,\,enöte}}{B_{yer-ay,\,enberi}} = 0{,}802 \cong \%80 \Rightarrow B_{enberi} = 1{,}25.B_{enöte}$$

Yer'in Ay üzerindeki çekim etkisi en beride, en öteye oranla 1,25 kat daha fazladır. Bu gel-git etkisi nedeniyle Ay yörüngesine kilitli dönme yapmakta (yani Yer çevresinde senkronize dolanmakta) ve dönme ekseni doğrultusunda sallanma (presesyon) hareketi yapmaktadır.

4.11. Hidrostatik denge denkleminden yararlanarak Ay'ın merkezi basıncını tahmin etmeye çalışın ve bunu Dünya'nın merkezi basıncı ile karşılaştırın.

C: Hidrostatik basınç denkleminden merkezi basınç:

$$P_c = \frac{2}{3}\pi.G.\rho^2 R^2 = P_c \quad \text{elde edilir.}$$

Burada yoğunluk (ρ)'un denklemini yerine yazıp sadeleştirmeler yapılırsa:

$$P_c = \frac{2}{3}\pi\ G.\rho^2 R^2\ ,\ \rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\ G\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 .R^2$$

$$\Rightarrow P_c = \frac{3GM^2}{8\pi r^4};\ \text{Ay için}\ M_{AY} = 7{,}35\times10^{22}\ kg,\ R_{AY} = r_{AY} = 1738\ km\ \text{kullanırsak;}$$

$$P_{c,\,Ay} = \frac{3.6{,}67\times10^{-11}.\left(7{,}35\times10^{22}\right)^2}{8\pi\left(1738000\right)^4}\ \frac{\frac{m^3}{kg.sn^2}.\,kg^2}{m^4} = 4{,}71\times10^9\,Pa = 4{,}71\times10^4\,Atm.$$

Yer için: $M_{YER} = 5{,}98\times10^{24}\,kg,\ r_{YER} = 6378\ km$ kullanırsak;

$$P_{c,\,yer} = \frac{3.6{,}67\times10^{-11}.\left(5{,}98\times10^{24}\right)^2}{8\pi\left(6378000\right)^4} = 1{,}72\times10^{11}\ P_a = 1{,}72\times10^6\,atm$$

$P_{c,\,yer}/P_{c,\,ay} = 1{,}72\times10^6\ atm/4{,}71\times10^4\,atm = 36{,}5$ olarak bulunur.

Yer'in merkezi basıncı, Ay'a göre 36,5 kat daha fazladır.

4.14. Bir kaya örneğinde bulunan ^{40}Ar ve ^{40}K oranının ^{40}Ar/^{40}K=3 olduğunu kabul ederek; bu kayanın yaşını bulunuz? Yaş belirlemesi yaparken hangi kabülleri yapmak zorunda olduğunuzu belirtiniz.

C: Verilenler: Kullanılacak formül:

$$\underbrace{\frac{{}^{40}Ar}{{}^{40}K}}_{\text{Bozunma oranı}} = 3 \qquad \frac{n}{n_0} = e^{0,693 \cdot t/\tau}$$

$n \rightarrow$ Şimdiki element miktarı

$n_0 \rightarrow$ Orjinal element miktarı

$t \rightarrow$ Şimdiki yaş

$\tau \rightarrow$ Bozulma zamanı

$$K_{orjinal} = K_{şimdi} + K_{bozulmuş}$$

$$= K_{şimdi} + 3.K_{şimdi} \Rightarrow K_{orjinal} = 4\,K_{şimdi} \Rightarrow \frac{n_{K,\,şimdi}}{n_{K,\,orjinal}} = \frac{1}{4}$$

$\dfrac{n}{n_0} = \dfrac{1}{4} = e^{-0,693\,.\,t/\tau}$, her iki tarafın "*ln*"si alınırsa;

$$1n\frac{1}{4} = 1n\; e^{-0,693,\,t/\tau}$$

$1n\dfrac{1}{4} = -0,693\,.\,t/\tau\,.\,\overbrace{1ne}^{1},$ *burada*, $\tau; n = \dfrac{n_0}{2}$ kadar azaldığı yarı ömürdür ($\tau = 1,3 \times 10^9\,yıl$)

$-1,3862 = -0,693\,.\,t/\tau$ $\qquad 2,0002 = \dfrac{t}{\tau} \Rightarrow t = 2.0004.\tau, \quad \tau = 1,3 \times 10^9\;yıl$

$\Rightarrow t = 1,6 \times 10^9\,yıl$

Burada, ^{40}Ar'un, taşın oluşumu sırasında barındırdığı başlangıç miktarı ihmal edilmiş ve zaman içerisinde taştan dışarı kaçmadığı kabul edilmiştir.