ORAN VE ORANTI HESAPLARI

ORAN: Aynı birimle ölçülen iki çokluğun bölme yoluyla karşılaştırılmasına "**oran**" denir. a'nın b'ye oranı; $\frac{a}{b}$ şeklinde gösterilir.

Örnek1.3: Ali'nin 50 TL'si, Ayşe'nin 100 TL'si olduğuna göre Ali'nin parasının Ayşe'nin parasına oranı;

$$\frac{50TL}{100TL} = \frac{1}{2}$$

dir. Yani, Ali'nin parası Ayşe'nin parasının $\frac{1}{2}$'si (yarısı) kadardır.

ORANTI: İki veya daha fazla oranın eşitliğine "**orantı**" denir. Yani a, b, c, d $\in$ R olmak üzere $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ gibi iki oran birbirine eşit ise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ifadesi bir orantıdır.

Her orantının eşit olduğu pozitif reel sayıya, "**orantı sabiti**" veya "**orantı katsayısı**" denir. Dolayısıyla her orantı denkleminin eşit olduğu bir k orantı sabiti vardır.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ (k= orantı sabiti)}$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısı a:b=c:d şeklinde de yazılabilir. Burada a ile d "dışlar", b ile c "içler" adını alır.

a, b, c, d, e, f $\in$ R olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ ifadesi de bir orantıdır. Bu üçlü orantıyı

a:c:e = b:d:f = k

şeklinde yazmak da mümkündür.

ÖZELLİK:

a, b, c, d $\in$ R olmak üzere:

Bir orantıda her zaman dışlar çarpımı, içler çarpımına eşittir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER:

1.2.2.ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER:

1) $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$ ise $\frac{x}{x+2y}$ ifadesinin değeri kaçtır?

çözüm:

1.yol: Soruda verilen eşitlikte içler dışlar çarpımı yaparsak:

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{4}\Rightarrow y=4.x$$

olur. Son eşitlikte, bulduğumuz y'nin 4x'e eşitliği kullanılarak sorulan ifadede y yerine 4x yazılırsa:

$$\frac{x}{x+2y}=\frac{x}{x+2.(4x)}=\frac{x}{9x}=\frac{1}{9}$$ bulunur.

2. yol: $\frac{x}{x+2y}$ 'nin çarpmaya göre tersi $\frac{x+2y}{x}$ 'dir.

$$\frac{x+2y}{x}=\frac{x}{x}+2\frac{y}{x}=1+2.\frac{4}{1}=1+8=9$$

$$\frac{x+2y}{x}=9\Rightarrow\frac{x}{x+2y}=\frac{1}{9}$$

olarak elde edilir.

2) $\frac{a+b}{a}=3$ ise $\frac{a+b}{b}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm:

1.yol:

$$\frac{a+b}{a}=3\Rightarrow 3a=a+b$$

$$\Rightarrow b=2a$$

Son eşitlikte bulduğumuz b'nin 2a'ya eşitliği kullanarak sorulan ifadede b yerine 2a yazarsak:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{a+2a}{2a}=\frac{3a}{2a}=\frac{3}{2}$$ bulunur.

2.yol:

$$\frac{a+b}{a}=3\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{a}{a}+\frac{b}{a}=1+\frac{b}{a}=3\Rightarrow\frac{b}{a}=2$$

$$\frac{b}{a}=2 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{a}{b}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$ olarak elde edilir.

3) $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}=\frac{p}{r}=5$ ise $\frac{x.z.r}{y.t.p}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm:

1.yol:

$$\frac{x}{y}=5 \Rightarrow x=5y$$

$$\frac{z}{t}=5 \Rightarrow z=5t$$

$$\frac{p}{r}=5 \Rightarrow p=5r$$ ’dir.

x, z ve p’nin bulduğumuz değerlerini sorulan ifadede yerlerine yazarsak:

$$\frac{x.z.r}{y.t.p}=\frac{5y.5t.r}{y.t.5r}=5$$ sonucu elde edilir.

2.yol:

$$\frac{x.z.r}{y.t.p}=\frac{x}{y}.\frac{z}{t}.\frac{r}{p}=5.5.\frac{1}{5}=5$$ bulunur.

4) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=3$ ise $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=3 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=9$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=9$$ olarak bulunur.

Doğru Orantı:

Birbirine bağlı iki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyor ise veya biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyor ise bu tür çokluklara “doğru orantılıdır” denir. “Doğru orantılıdır” ifadesi yerine çoğu kez kısaca “orantılıdır” sözcüğü kullanılır.

k orantı sabiti olmak üzere, x ile y doğru orantılı olsun. Bu durumda orantı denklemi:

$$\boxed{\frac{x}{y} = k \Rightarrow x = k.y}$$

şeklindedir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER:

1) x+3 ve y-3 çoklukları doğru orantılıdır. x=5 iken y=7 oluyorsa x=1 iken y kaçtır?

çözüm:

x+3, y-3 ile doğru orantılı olduğundan doğru orantı denklemi:

$$x+3=k.(y-3)$$

şeklindedir. İlk olarak x=5, y=7 değerleri bu denklemde yerine yazılarak k orantı sabiti bulunursa:

$$5+3 = k.(7-3) \Rightarrow 8=k.4 \Rightarrow k=2$$

Bu durumda orantı denklemi; x+3=2.(y-3) biçimine gelir. Şimdi de ikinci durumda verilen x=1değerini denklemde yerine yazarak y’yi bulalım:

$$1+3=2.(y-3) \Rightarrow 4=2.(y-3) \Rightarrow y-3=2 \Rightarrow y=5$$

2) x, y,z sayıları sırasıyla 13,12, 5 sayıları ile orantılıdır. x+z-y=6 olduğuna göre x’in değeri kaçtır?

çözüm:

x, y, z sırasıyla 13, 12, 5 sayıları ile doğru orantılı olduğundan;

$$x=13k, \quad y=12k, \quad z=5k$$

şeklinde alınabilir. Bu değerler verilen eşitlikte yerlerine yazılırsa:

$$x+z-y=6 \Rightarrow 13k+5k-12k=6$$
$$\Rightarrow 6k=6$$
$$\Rightarrow k=1$$

$x=13k \Rightarrow x=13.1=13$ olarak bulunur.

3) $\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ ve 3a+b-c=10 olduğuna göre c kaçtır?

çözüm:

$\frac{a}{2}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k \Rightarrow$ a=2k, b=4k, c=5k alınabilir.

$3a+b-c=10 \Rightarrow 3.(2k)+4k-5k=10$

$\Rightarrow 5k=10$

$\Rightarrow k=2$

$c=5k \Rightarrow c=5.2=10$ olarak bulunur.

4) Bir lastik ip çekilip uzatıldığında boyu %110 artıyor. Buna göre çekilmiş halde boyu 0,84 m olan lastiğin çekilmeden önceki boyu kaç metre idi?

çözüm:

İlk Boy	Çekildiğinde Oluşan Boy
100 cm iken	210 cm oluyor ise
x cm iken	84 cm olur.

D.O.

$100.84=x.210 \Rightarrow x=\frac{100.84}{210}=40$ cm=0,4 m bulunur.

Ters Orantı:

Birbirine bağlı iki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyor ise, veya biri azalırken diğeri aynı oranda artıyor ise bu tür çokluklara "ters orantılıdır" denir.

k orantı sabiti olmak üzere, x ile y ters orantılı olsun. Bu durumda orantı denklemi:

$\boxed{x.y=k \Rightarrow x=\frac{k}{y}}$ şeklindedir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER:

1) x ve 2y çoklukları ters orantılıdır. x=3 iken y=1 oluyorsa y=2 iken x kaç olur?

çözüm:

x, 2y ile ters orantılı olduğundan ters orantı denklemi:

$$x=\frac{k}{2y}$$

şeklindedir.

x=3 iken y=1 $\Rightarrow 3 = \frac{k}{2.1} \Rightarrow k = 6$ olur.

Bu durumda orantı denklemi: $x = \frac{6}{2y}$ biçimine gelir. Şimdi de ikinci durumda verilen y=2 değerini elde ettiğimiz denklemde yerine yazarak x'i bulalım:

$x = \frac{6}{2.2} \Rightarrow x = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ bulunur.

2) 2x=y=5z ve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre x+y+z toplamı kaçtır?

çözüm:

2x=y=5z=k $\Rightarrow$ $x = \frac{k}{2}$, $y = k$, $z = \frac{k}{5}$ alınabilir.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\frac{k}{2}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{\frac{k}{5}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k} + \frac{1}{k} + \frac{5}{k} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{k} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow k = 12$$

elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{k}{2} \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6 \\ y = k \Rightarrow y = 12 \\ z = \frac{k}{5} \Rightarrow z = \frac{12}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow x + y + z = 6 + 12 + \frac{12}{5} = \frac{102}{5} \text{ bulunur.}$$

3) x, y, z sayıları sırasıyla 12, 15 ve 20 ile ters orantılıdır. x-y+2z=7 olduğuna göre x kaçtır?

çözüm:

x, y, z sırasıyla 12, 15, 20 sayıları ile ters orantılı ise:

$x = \frac{k}{12}, y = \frac{k}{15}, z = \frac{k}{20}$ alınabilir.

$$x - y + 2z = 7 \Rightarrow \frac{k}{12} - \frac{k}{15} + 2.\frac{k}{20} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{k}{12} - \frac{k}{15} + \frac{k}{10} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{10k - 8k + 12k}{120} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{14k}{120} = 7$$

$\Rightarrow$ k=60

$x = \frac{k}{12} \Rightarrow x = \frac{60}{12} = 5$ bulunur.

4) Bir musluk boş havuzu 36 saatte doldurursa, aynı kapasitedeki 3 musluk aynı havuzu kaç saatte doldurur?

çözüm:

1 musluk bir havuzu $\longleftrightarrow$ 36 saatte doldurursa
3 musluk aynı havuzu $\longleftrightarrow$ x saatte doldurur.

T.O.

1.36=3.x $\Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$ saat bulunur.

Bileşik Orantı:

İçinde birden fazla orantının(ters orantı da olabilir, doğru orantı da olabilir) kullanıldığı orantılara "bileşik orantı" denir.

k orantı sabiti olmak üzere; x, y ile doğru, z ile ters orantılı olsun. Bu durumda orantı denklemi:

$$\boxed{x = \frac{k.y}{z}}$$

şeklindedir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER:

1) y sayısı (x+1) ile doğru ve (x-2) ile ters orantılıdır. x=4 iken y=15 oluyorsa y=12 iken x kaç olur?

çözüm:

Orantı denklemi: $y = \frac{k(x+1)}{x-2}$ şeklindedir. İk durumda verilen x=4, y=15 değerleri denklemde yerlerine yazılırsa:

$$15 = \frac{k(4+1)}{4-2} \Rightarrow k = 6$$

bulunur. Bu durumda $y = \frac{6(x+1)}{x-2}$ denklemi elde edilir. Şimdi de ikinci durumda verilen y=12 değeri denklemde yerine yazılırsa:

$$12 = \frac{6(x+1)}{x-2} \Rightarrow 2x - 4 = x + 1 \Rightarrow x=5$$

bulunur.

2) a, 3 ile ters orantılı ve b, 5 ile doğru orantılıdır. a+b=32 olduğuna göre b-a farkı kaçtır?

çözüm:

a, 3 ile ters ve b, 5 ile doğru orantılı olduğundan;

$$a = \frac{k}{3}\ , b=5k$$

alınabilir. Bu durumda,

$$a + b = 32 \Rightarrow \frac{k}{3} + 5k = 32 \Rightarrow k = 6$$

elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{k}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\ b = 5k = 5.6 = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow b - a = 30 - 2 = 28 \text{ olarak bulunur.}$$

3) Bir otelde 4 musluk 60 m^3 havuzu 18 saatte doldurmaktadır. 6 musluğun 50 m^3 havuzu kaç saatte dolduracağı söylenebilir?

çözüm:

4 musluk	60 m^3 havuzu	18 saatte doldurursa
6 musluk	50 m^3 havuzu	x saatte doldurur.
T.O.	D.O.	

$$4.50.18 = 6.60.x \Rightarrow x = \frac{4.50.18}{6.60} = 10 \text{ saatte doldurur.}$$