Statik Alan $A(x,y,z)$

Zaman Bağımlı (Zamanla Değişen Alan) $A(x,y,z;t)$

Zaman Harmonikli Alan $A(x,y,z;t)$'nin t bağımlılığı $\cos(\omega t+\theta_0)$ şeklinde ise

Fazör Gösterimi:

Herhangi bir sinüzoidal sinyal, üç parametre ile betimlenebilir:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Bu sinyalin fazör olarak ifade edilmesi, yapılan aritmetik işlemleri kolaylaştırır.

Zaman Harmonikli herhangi bir vektörel alanın fazör ifadesi ise:

$$\overline{\mathscr{A}}(x,y,z;t) = \mathrm{Re}\{\overline{A}(x,y,z)e^{j\omega t}\}$$

olarak tanımlanır.

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

olduğu için

$$\overline{\mathscr{A}}(x,y,z;t) = \mathrm{Re}\{\overline{A}(x,y,z)e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\overline{A}(x,y,z)[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]\} = \overline{A}(x,y,z)\cos(\omega t)$$

Not: Artık, zaman harmonikli bir alan ile onun fazör notasyonunu birbirinden farklı yazacağız.

Zaman harmonikli alan: $\overline{\mathscr{A}}(x,y,z;t)$

Aynı alanın fazör gösterimi: $\overline{A}(x,y,z)$

$$\frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) = j\omega(e^{j\omega t})$$

$$\int (e^{j\omega t})dt = \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega t})$$

Dolayısıyla:

$$\frac{\partial \overline{\mathscr{A}}(x,y,z;t)}{\partial t} \longleftrightarrow j\omega \overline{A}(x,y,z)$$

$$\int \overline{\mathscr{A}}(x,y,z;t)dt \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}\overline{A}(x,y,z)$$

Bu da bize işlem kolaylığı sağlar...

Zaman Domain'inde Maxwell Denklemleri:

$$\overline{\nabla} \times \overline{\mathscr{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathscr{B}}}{\partial t}$$ Faraday Yasası

$$\overline{\nabla} \times \overline{\mathscr{H}} = \overline{\mathscr{J}} + \frac{\partial \overline{\mathscr{D}}}{\partial t}$$ Amperé Yasası

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\mathscr{D}} = \rho_v$$ Gauss Yasası

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\mathscr{B}} = 0$$ İzole Manyetik Bulunmama Yasası

Fazör Domain'inde Maxwell Denklemleri:

$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -j\omega\overline{B}$ Faraday Yasası

$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J} + j\omega\overline{D}$ Amperé Yasası

$\overline{\nabla} \cdot \overline{D} = \rho_v$ Gauss Yasası

$\overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0$ İzole Manyetik Bulunmama Yasası

Faraday Yasası'nın buklesini alırsak:

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{E} = \overline{\nabla} \times \left(-j\omega\overline{B}\right) = -\overline{\nabla} \times \left(j\omega\overline{B}\right) = -\overline{\nabla} \times \left(j\omega\mu\overline{H}\right)$$
$$= -j\omega\mu\left(\overline{\nabla} \times \overline{H}\right)$$

Deklemde, kaynaksız ortam (yani akım yoğunluğunun ve yük yoğunluğunun 0 olduğu ortam) için Amperé Yasası'nı kullanırsak:

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{E} = -j\omega\mu(\overline{\nabla} \times \overline{H}) = -j\omega\mu(\overline{J} + j\omega\overline{D}) = -j\omega\mu(j\omega\overline{D})$$
$$= -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\overline{E}) = -j^2\omega^2\mu\varepsilon\overline{E} = \omega^2\mu\varepsilon\overline{E}$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{E} = \omega^2\mu\varepsilon\overline{E}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{E} - k^2\overline{E} = 0$$

Herhangi bir vektörel alan için:

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{A} = \overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{A}) - \overline{\nabla}^2\overline{A}$$

Dolayısıyla:

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{E} - k^2\overline{E} = \overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{E}) - \overline{\nabla}^2\overline{E} - k^2\overline{E} = 0$$

Kaynaksız ortamda Gauss Yasası'nı kullanırsak:

$$\overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{E}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot (\frac{1}{\varepsilon}\overline{D})) = \frac{1}{\varepsilon}\overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{D}) = \frac{1}{\varepsilon}\overline{\nabla}(\rho_v)$$
$$\rho_v = 0$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{E}) = \frac{1}{\varepsilon}\overline{\nabla}(\rho_v) = 0$$

Bu durumda:

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{E} - k^2\overline{E} = \overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{E}) - \overline{\nabla}^2\overline{E} - k^2\overline{E} = -\overline{\nabla}^2\overline{E} - k^2\overline{E} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \overline{\nabla}^2\overline{E} + k^2\overline{E} = 0$$

Daha açık bir şekilde yazarsak:

$$\overline{\nabla}^2 = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \text{ve}$$

$$\overline{E} = \overline{E}(x,y,z) = \hat{a}_x E_x(x,y,z) + \hat{a}_y E_y(x,y,z) + \hat{a}_z E_z(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\nabla}^2 \overline{E} = \overline{\nabla}^2 \overline{E}(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\hat{a}_x E_x(x,y,z) + \hat{a}_y E_y(x,y,z) + \hat{a}_z E_z(x,y,z) \right)$$

$$= \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial x^2}$$

$$+ \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial y^2}$$

$$+ \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial z^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial z^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial z^2}$$

veya

$$\overline{\nabla}^2 \overline{E} = \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial z^2}$$

$$+ \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial z^2}$$

$$+ \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial z^2}$$

Bu durumda:

$$\overline{\nabla}^2 \overline{E} + k^2 \overline{E} =$$

$$\hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial z^2}$$

$$+ \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial z^2}$$

$$+ \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial z^2}$$

$$+ \hat{a}_x k^2 E_x(x,y,z) + \hat{a}_y k^2 E_y(x,y,z) + \hat{a}_z k^2 E_z(x,y,z)$$

$$= \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_x \frac{\partial^2 (E_x(x,y,z))}{\partial z^2} + \hat{a}_x k^2 E_x(x,y,z)$$

$$+ \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_y \frac{\partial^2 (E_y(x,y,z))}{\partial z^2} + \hat{a}_y k^2 E_y(x,y,z)$$

$$+ \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial x^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial y^2} + \hat{a}_z \frac{\partial^2 (E_z(x,y,z))}{\partial z^2} + \hat{a}_z k^2 E_z(x,y,z) = 0$$

En son elde ettiğimiz ifadede, her bir satırdaki terimler farklı yönlerdedir; dolayısıyla her biri 0'a eşittir. Bir başka deyişle, yukarıdaki ifade 3 ayrı skaler denkleme ayrıştırılabilir:

$$\frac{\partial^2(E_x(x,y,z))}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(E_x(x,y,z))}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(E_x(x,y,z))}{\partial z^2}+k^2E_x(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2(E_y(x,y,z))}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(E_y(x,y,z))}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(E_y(x,y,z))}{\partial z^2}+k^2E_y(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2(E_z(x,y,z))}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(E_z(x,y,z))}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(E_z(x,y,z))}{\partial z^2}+k^2E_z(x,y,z)=0$$

Ya da, kısaca

$$\overline{\nabla}^2E_x(x,y,z)+k^2E_x(x,y,z)=0$$
$$\overline{\nabla}^2E_y(x,y,z)+k^2E_y(x,y,z)=0$$
$$\overline{\nabla}^2E_z(x,y,z)+k^2E_z(x,y,z)=0$$

$$\underbrace{\overline{\nabla}}_{1/\mathrm{m}}\times\underbrace{\overline{\nabla}}_{1/\mathrm{m}}\times\underbrace{\overline{E}}_{\mathrm{V/m}}-\underbrace{k^2}_{\color{red}{1/\mathrm{m}^2}}\underbrace{\overline{E}}_{\mathrm{V/m}}=0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\underbrace{\mu}_{\mathrm{H/m}}\underbrace{\varepsilon}_{\mathrm{F/m}}}}}_{\to\ \mathrm{m/s}}$$

F/m = H.F/m^2 = s^2/m^2

Hatırlatma: *LC* devrelerindeki zaman sabiti

$$\underbrace{\tau=\sqrt{\underbrace{L}_{\mathrm{H}}\underbrace{C}_{\mathrm{F}}}}_{\to\ \mathrm{s}}$$

F = H.F = s^2