3. TAHMİN

Bir istatistik bir parametreyi belirlemek amacıyla kullanıldığında bu istatistiğe **tahmin edici** denir. Tahmin edicinin almış olduğu değere **tahmin** denir.

Tanım. $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemi $\left(f(.;\theta), \theta \in \Theta\right)$ ve T, θ için bir tahmin edici olmak üzere $E\left(T\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)\right) = \theta$ oluyorsa, $T\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$ tahmin edicisine θ için **yansız tahmin edici** denir.

Tanım. $T\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$ ise yani $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|T\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right) - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0$$

oluyorsa T tahmin edicisine θ için **tutarlı tahmin edici** denir.

İstatistiklerden faydalanılarak kitle parametreleri için iki tip tahminde bulunulur.

Nokta tahmini; parametreye uygun bir istatistiğin tek sayısal değeridir. Örneğin, kitle ortalamasını tahmin etmek için örneklem ortalaması alınırsa bu bir nokta tahmin edicisidir.

Aralık Tahmini; Bilinmeyen kitle parametresinin belli bir olasılıkla içinde bulunacağı rasgele bir aralığı (iki sınırı) belirlemektir.

3.1. Güven Aralığı ve Hipotez Testi

Hipotez, kitle dağılımı ile ilgili öne sürülen bir önermedir. Örneğin, kitle dağılımı normaldir ya da kitle dağılımının ortalaması sıfırdır gibi. Kitle dağılımı dağılımların parametrelenmiş bir ailesinin elemanı olup burada parametre ile ilgili hipotezler üzerinde durulacaktır. Parametre kümesi, $\theta \subset R^r$, $r > 1$ olmak üzere $X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(.;\theta), \theta \in \Theta$ olan dağılımdan bir örneklem olsun. Parametre kümesinin, boş olmayan iki alt kümeye,

$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$$

gibi bir parçalanması için, $\theta \in \Theta_0$ gibi bir ifadeye (önermeye, iddiaya) parametrik hipotez denir ve genellikle H_0 ile gösterilir. H_0 hipotezine sıfır yada boşluk hipotezi denir. $\theta \in \Theta_1$ ifadesi veya Θ_1 alt kümesi de θ hakkında bir hipotezdir. Bu hipoteze, H_0 hipotezinin karşıt (alternatif) hipotezi denir ve genellikle H_1 ile gösterilir. Hipotez testi, ortaya atılan bu iki hipotezden hangisinin gözlenen örneklem değerleri ile desteklendiğinin ortaya çıkarılmasıdır.

Hipotez testinde parametre kümesi, hipotezleri oluşturan ayrık iki kümenin birleşimi olmak üzere, bir hipotez bir elemanlı olduğunda basit hipotez, birden çok elemanlı olduğunda karmaşık hipotez adını alır.

Yapılan hipotez testi sonucunda aşağıdaki durumlar ortaya çıkabilir.

Gerçek

		H_0 doğru	H_1 doğru
Sonuç	H_0 red	1.Tip hata (α)	Doğru karar
	H_0 red edilememesi	Doğru karar	2.Tip hata (β)

$H_0 : \theta \in \Theta_0$, $H_1 : \theta \in \Theta_1$ hipotez testi probleminde 1. Tip hata yapma olasılığı için göze alınan ve önceden söylenen sınıra testin anlam düzeyi denir ve α ile gösterilir.

$$P(I.tip\ hata) = P(H_0\ red \mid H_0\ \text{doğru}) = \alpha$$

$$1-\alpha = Güven\ Düzeyi = 1 - P(I.tip\ hata) = P(H_0\ red\ edilemiyor \mid H_0\ \text{doğru})$$

$$P(II.tip\ hata) = P(H_0\ red\ \text{edilemiyor} \mid H_0\ \text{yanlış}) = \beta$$

$$1-\beta = Testi\ Gücü = P(H_0\ red \mid H_0\ \text{yanlış})$$

Hipotezin red edildiği bölgeye red bölgesi ya da kritik alan denir.

$p-$değeri: H_0 doğru olduğunda test istatistiğinin hesaplanan değerine eşit ya da uç değerler alması olasılığıdır.

$p-\text{değeri} > \alpha \Rightarrow H_0$ red edilemez

$p-\text{değeri} \leq \alpha \Rightarrow H_0$ red edilir

Genel olarak hipotez testleri 3 aşama ile ifade edilebilir.

1.Aşamada, hipotez kurulur. Burada üç tip iddia olabilir; verilen bir θ değerinin θ_0'dan küçük olduğu iddia ediliyor olabilir, verilen bir θ değerinin θ_0'dan büyük olduğu iddia ediliyor olabilir veya verilen bir θ değerinin θ_0'dan farklı olduğu iddia ediliyor olabilir.

2.Aşamada, test istatistiği oluşturulur ve verilen örneklem değerlerine göre test istatistiğinin değeri hesaplanır. Test istatistiğinin değeri her zaman H_0'ın doğruluğu koşulu altında hesaplanır.

3. Aşamada da test istatistiğinin hesaplanan değerinin kritik bölgeye düşüp düşmemesine göre H_0 hipotezi reddedilir veya reddedilemez.

3.1.1. Kitle Ortalaması İçin Güven aralığı ve Hipotez Testi

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ normal dağılıma sahip bir kitleden çekilmiş rastgele örneklem olmak üzere, kitle ortalaması için hipotez testi yapılırken kitle varyansının bilinip bilinmemesine göre iki durum söz konusudur.

3.1.1.1. Kitle Varyansı σ^2 Biliniyor

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ varyansı σ^2 olarak bilinen normal dağılıma sahip bir kitleden çekilmiş rastgele örneklem olmak üzere, kitle ortalamasının dağılımının da ortalaması μ, varyansı σ^2/n olan normal dağılım olduğu daha önceki bölümlerde ifade edilmişti. Buna göre,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$$

olup

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma \big/ \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

yazılabilir. Buradan,

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P(-z_{\alpha/2} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha \longrightarrow 1-\alpha$ güven düzeyinde μ için güven aralığı

olarak elde edilir. Hipotez testinin adımları aşağıdaki gibidir.

1) Hipotez kurulur.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0, \mu > \mu_0, \mu \ne \mu_0$$

2) $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

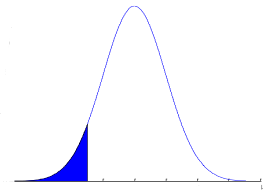
olmak üzere test istatistiğinin aldığı değer

$$z_h = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

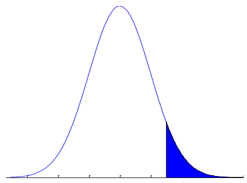
olarak hesaplanır.

3) Kritik bölgeye göre hipotez reddedilir ya da reddedilemez.

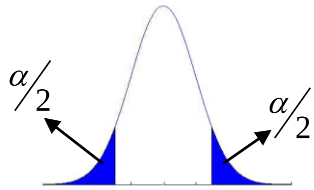
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \ne \mu_0$



$z_h < -z_\alpha$ ise H_0 red edilir



$z_h > z_\alpha$ ise H_0 red edilir



$z_h < -z_{\alpha/2}$ veya $z_h > z_{\alpha/2}$ ise H_0 red edilir

3.1.1.2. Kitle Varyansı σ^2 Bilinmiyor ($n < 30$)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemi varyansı bilinmeyen normal dağılıma sahip bir kitleden çekilmiş rastgele örneklem ise,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad (S^2 \text{ örneklem varyansı})$$

olduğu daha önceki bölümlerden biliniyor. Buna göre,

$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} \le t \le t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P(-t_{n-1,\alpha/2} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \le t_{n-1,\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha \longrightarrow$$ $1-\alpha$ güven düzeyinde μ için güven aralığı

olarak elde edilir.

1) Hipotez kurulur

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

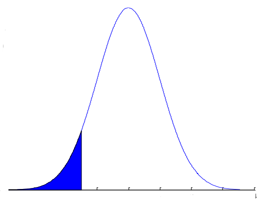
$$H_1 : \mu < \mu_0, \mu > \mu_0, \mu \ne \mu_0$$

2) Test istatistiği hesaplanır.

$$t_h = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

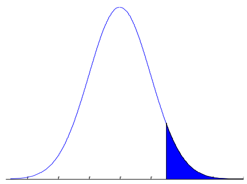
3) Kritik bölgeye göre hipotez reddedilir ya da reddedilemez.

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$



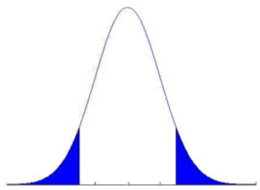
$t_h < -t_{n-1,\alpha}$ ise H_0 reddedilir

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$



$t_h > t_{n-1,\alpha}$ ise H_0 reddedilir

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$



$t_h < -t_{n-1,\alpha/2}$ veya $t_h > t_{n-1,\alpha/2}$ ise H_0 reddedilir

3.1.2. Kitle varyansı için güven aralığı ve Hipotez Testi

Kitle varyansı için güven aralığı oluşturulurken örneklem varyansı S^2'den yararlanılır. Değişkene ilişkin dağılımın normal olması durumunda örneklem varyansı için

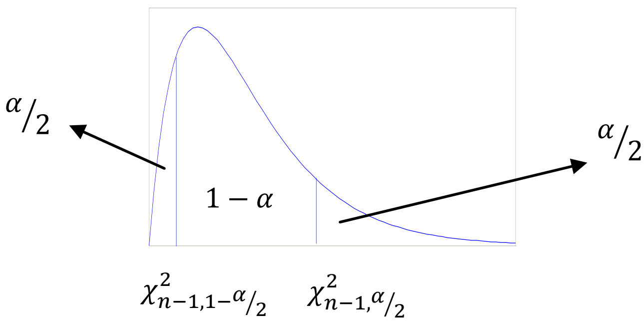
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

olduğu biliniyor. Buna göre,

$$P\left(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

yazılabilir.



χ^2 dağılımı simetrik bir dağılım olmadığı için $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ ve $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ değerleri tablodan ayrı ayrı bulunur.

1) Hipotez kurulur.

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ ya da $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ya da $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

2) Test istatistiği,

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

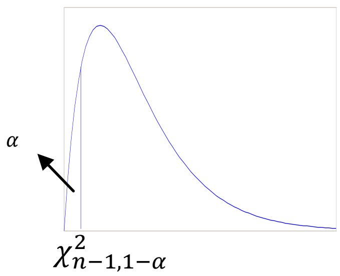
olmak üzere,

$$\chi_h^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

değeri hesaplanır.

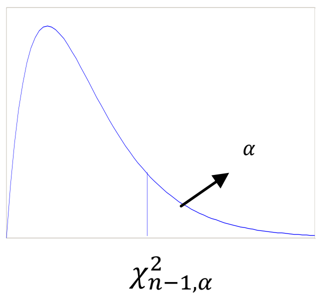
3) Kritik bölgeye göre hipotez reddedilir ya da reddedilemez.

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$



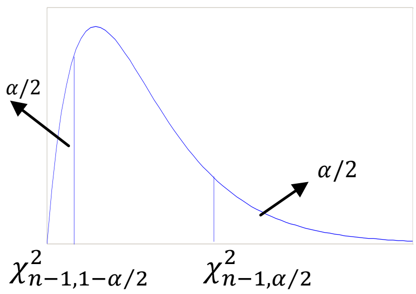
$\chi_h^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ ise H_0 reddedilir

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$



$\chi_h^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$ ise H_0 reddedilir

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$



$\chi_h^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ ya da
$\chi_h^2 > \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ ise H_0 reddedilir