Fark Operatörü

Ankara Üniversitesi

Bağımsız değişken ayrık (discrete) ya da onu bir ayrık değişken gibi görmek matematiksel bakımdan uygun olduğu zaman fark denklem modelleri ortaya çıkar. Fark denklemleri sadece diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil, aynı zamanda biyoloji, ekonomi, mühendislik ve benzeri alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde yer alırlar. Örneğin, ekonomide fiyat değişimleri yıllık, aylık, haftalık veya günlük hesaplanır ve böyle bir durumda zaman bir bağımsız değişken olarak ayrıktır.

Tanım

Tanım 1 (Fark operatörü) $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya x in birinci basamaktan farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesidir.

Örnek

Örnek 1 $x(n) = 5n^2 - 4n + 3$ olsun. x in birinci basamaktan farkı

$$\begin{aligned} \Delta x(n) &= 5(n+1)^2 - 4(n+1) + 3 - 5n^2 + 4n - 3 \\ &= 10n + 1 \end{aligned}$$

dir.

x in ikinci basamaktan farkı

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(n) &= \Delta(\Delta x(n)) \\ &= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n), \end{aligned}$$

şeklinde olup, böyle devam edilirse x in k yıncı basamaktan farkı

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} x(n+k-j)$$

şeklinde hesaplanır.

Ayrıca, burada $k \geq j$ olmak üzere

$$\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-j+1)}{j!}$$

dir.

Örnek

Örnek 2 $x(n) = 5n^2 - 4n + 3$ için x in ikinci basamaktan farkı,

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(n) &= \Delta(\Delta x(n)) \\ &= \Delta(10n+1) \\ &= 10. \end{aligned}$$

Not: Fark operatörü iki ya da daha çok değişkenli fonksiyonlara uygulanırsa, Δ operatörünün sağ alt köşesine konulan indis yardımıyla hangi değişkenin farkının alındığı gösterilir.

Örnek

Örnek 3

$$\Delta_n(ne^m) = (n+1)e^m - ne^m = e^m$$

$$\Delta_m(ne^m) = ne^{m+1} - ne^m = (e-1)ne^m$$

Teorem

Teorem 1 Δ *fark operatörü lineerdir.*