

# İkinci Basamaktan Lineer Homogen Denklemler ve Çözümleri

Ankara Üniversitesi

İkinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen

$$x(n+2) + a_1x(n+1) + a_2x(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

fark denklemini ele alalım. Burada  $a_1, a_2$  reel sabitler olup  $a_2 \neq 0$  dir. Bu denklem için  $x(n) = \lambda^n$  şeklinde çözüm aranırsa,

$$\lambda^{n+2} + a_1\lambda^{n+1} + a_2\lambda^n = 0$$

denklemini elde edilir. Buradan,

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (2)$$

karakteristik denklemini bulunur.  $\lambda_1, \lambda_2$  köklerinde karakteristik kökler denir. Bu köklere bağlı olarak 3 durum ortaya çıkar.

- Durum 1

$\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri reel ve birbirinden farklı ise, (1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$$

şeklindedir. Burada,  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

- Durum 2

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  ise, (1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = (c_1 + c_2 n)\lambda^n$$

şeklindedir. Burada,  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

- Durum 3

$\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri eşlenik kompleks yani,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  ve  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  olsun. Burada  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ve  $\beta \neq 0$  dır.  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$  olmak üzere, (1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = r^n (c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta)$$

dır. Burada,  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi reel sabitlerdir.

## Örnek

$x(n+2) - 7x(n+1) + 12x(n) = 0$  denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

olup  $\lambda_1 = 3$  ve  $\lambda_2 = 4$  karakteristik köklendir. Verilen denklemin genel çözümü

$$x(n) = c_1 3^n + c_2 4^n$$

dir.

## Örnek

$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 0$  denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

olup  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$  karakteristik kökü bulunur. Verilen denklemin genel çözümü

$$x(n) = (c_1 + c_2 n)2^n$$

dir.

## Örnek

$x(n+2) + x(n) = 0$  denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

olup  $\lambda_{1,2} = \pm i$  karakteristik köklendir.  $r = 1$  ve  $\theta = \frac{\pi}{2}$  olmak üzere, verilen denklemin genel çözümü

$$x(n) = c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

dir.