Yüksek Basamaktan Sabit Katsayılı Lineer Homogen Fark Denklemleri

Ankara Üniversitesi

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ katsayıları reel sabitler ve $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \ldots + a_k x(n) = 0 \tag{1}$$

k yıncı basamaktan lineer sabit katsayılı homogen fark denklemini ele alalım.

$x(n) = \lambda^n$ şeklinde çözüm aranırsa,

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k = 0$$

karakteristik denklemi bulunur. Bu denklemin karakteristik köklerine bağlı olarak 3 durum ortaya çıkar.

- Durum 1

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ kökleri reel ve birbirinden farklı ise, (1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n$$

dir; burada c_i, $i = 1, 2, ..., k$, katsayıları keyfi reel sabitlerdir.

- Durum 2

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ kökleri reel ve sırası ile $m_1, m_2, ..., m_r$ katlı olsunlar. Bu durumda, (1) denklemi

$$(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}...(E-\lambda_r)^{m_r}x(n)=0$$

şeklinde yazılabilir. O halde, genel çözüm

$$x(n)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^n(c_{i0}+c_{i1}n+c_{i2}n^2+...+c_{im_{i-1}}n^{m_i-1})$$

dir.

- Durum 3

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ karakteristik kökü m katlı olsun. $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ve $\theta = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$ olmak üzere, (1) denkleminin $2m$ tane gerçel değerli bağımsız çözümü

$$r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta, nr^n \cos n\theta, nr^n \sin n\theta, ..., n^{m-1} r^n \cos n\theta, n^{m-1} r \sin n\theta$$

biçimindedir.

Örnek

$(E^2-9)(E^2-3E+2)x(n)=0$ denkleminin genel çözümünü yazalım. Bu denkleme ait karakteristik denklem

$$(\lambda^2-9)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$

olup, karakteristik kökler $\lambda_1=-3,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=2$ dir. Genel çözüm;

$$x(n)=c_1(-3)^n+c_2+c_3 2^n+c_4 3^n$$

dir.

Örnek

$(E^2-4)^3x(n)=0$ denkleminin genel çözümünü yazalım. Bu denkleme ait karakteristik denklem

$$(\lambda^2-4)^3=0$$

olup, $\lambda_{1,2,3}=-2$ ve $\lambda_{4,5,6}=2$ karakteristik köklerdir. Genel çözüm;

$$x(n)=(c_1+c_2n+c_3n^2)(-2)^n+(c_4+c_5n+c_6n^2)2^n$$

dir.