

Lineer Olmayan Skaler Fark Denklemleri

Ankara Üniversitesi

Otonom Denklemler

Tanım

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad n \geq n_0$$

biçiminde olan bir denkleme **otonom denklem** denir.

$x(n_0) = x_0$ olsun.

$$x(n_0 + 1) = f(x(n_0))$$

$$x(n_0 + 2) = f(x(n_0 + 1)) = f(f(x(n_0))) = f^2(x_0)$$

\vdots

$$x(n_0 + n - n_0) = f^{n-n_0}(x_0)$$

olup, $x(n) = f^{n-n_0}(x_0)$ bulunur.

Otonom Olmayan Denklemler

Tanım

$g : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x(n+1) = g(n, x(n))$$

biçiminde olan bir denkleme **otonom olmayan denklem** denir.

Riccati Denklemi

Tanım

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = 0$$

denklemine **Riccati denklemi** denir.

Bu denklemi çözmek için $x(n) = \frac{1}{y(n)}$ dönüşümü yapılır.

Bu dönüşüm sonucunda

$$\frac{1}{y(n+1)} \frac{1}{y(n)} + p(n) \frac{1}{y(n+1)} + q(n) \frac{1}{y(n)} = 0$$

veya

$$q(n)y(n+1) + p(n)y(n) + 1 = 0$$

birinci basamaktan lineer denklem elde edilir.

Homogen Olmayan Riccati Denklemi

Tanım

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = g(n)$$

denkleminde **homogen olmayan Riccati denklemi** denir.

Bu denklemi çözmek için $x(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)} - p(n)$ dönüşümü yapılır.

Bu dönüşüm sonucunda

$$y(n+2) + [q(n) - p(n+1)]y(n+1) - [g(n) + q(n)p(n)]y(n) = 0$$

lineer denklemi elde edilir.

Genel Riccati Denklemi

Tanım

$$x(n+1) = \frac{a(n)x(n) + b(n)}{c(n)x(n) + d(n)}$$

denkleme **genel Riccati denklemi** denir. Burada $n \geq n_0$ için $c(n) \neq 0$ ve $a(n)d(n) - b(n)c(n) \neq 0$ dir.

Bu denklemi çözmek için $c(n)x(n) + d(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)}$ veya

$$x(n) = \frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{y(n)} \text{ dönüşümü yapılır.}$$

Bu dönüşün sonucunda

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = 0$$

denklemini elde edilir.

Homogen Denklemler

Tanım

$$f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}\right) = 0$$

biçimindeki denkleme **homogen fark denklemi** denir.

Bu denklemi çözmek için

$$y(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)}$$

dönüşümü yapılır.