3. FONKSİYON DİZİLERİNİN NOKTASAL VE DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

Teorem 1. Her n için f_n fonksiyonları sürekli ve I üzerinde $f_n \to f$ (noktasal) olsun. I kümesi üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (düzgün) ise aynı küme üzerinde f limit fonksiyonu da süreklidir.

Örnek 1. $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{n^2x^2+4}$ eşitliği ile tanımlanan (f_n) dizisi, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ?

Çözüm.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ \\ 1 & , \quad x \neq 0 \end{cases} = f(x)$$

olup, $\mathbb{R}$ üzerinde (f_n) dizisi, f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Ancak f fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksizdir. Dolayısıyla Theorem 1 gereğince yakınsama düzgün olamaz.

Örnek 2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2nx}{5+nx}$ ile verilen (f_n) fonksiyon dizisi $[0,1]$ aralığı üzerinde

a) Noktasal yakınsak mıdır ?

b) Düzgün yakınsak mıdır ?

Çözüm. a)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ \\ 2 & , \quad x \neq 0 \end{cases} = f(x)$$

olup $[0,1]$ aralığı üzerinde $f_n \to f$ (noktasal) gerçeklenir.

b) f fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksiz olduğundan $I = [0,1]$ aralığı üzerinde (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

Tanım 1. (Düzgün Cauchy Dizisi) (f_n), A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n \geq 0$ ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa (f_n), A üzerinde bir düzgün Cauchy dizisidir denir.

Teorem 2. (f_n) fonksiyon dizisinin, A kümesi üzerinde düzgün Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul (f_n) dizisinin, A kümesi üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır.

Teorem 3. **(Dini Teoremi)** (f_n) dizisi, kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n), sürekli bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak ve herbir $x \in [a, b]$ için $(f_n(x))$ reel terimli dizisi monoton azalan veya artan ise, (f_n) dizisi $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Teorem 4. (f_n) dizisi, I aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve her bir f_n, I üzerinde sürekli olsun. Bu taktirde

$$F_n(x) = \int_c^x f_n(t)\, dt$$

eşitliği ile tanımlanan (F_n) dizisi

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

şeklinde tanımlı F fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Örnek 3. $F_n(x) = \dfrac{\ln(1 + n^3x^2)}{n^2}$ şeklinde tanımlanan (F_n) dizisinin $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Teorem 4 kullanılarak

$$\frac{d}{dx} F_n(x) = F_n'(x) = \frac{2nx}{1 + n^3x^2} = f_n(x)$$

yazılır. Her bir f_n, $[0, 1]$ üzerinde süreklidir ve $(f_n) \rightrightarrows f = 0$ $(düzgün)$ gerçeklenir. Gerçekten,

Her $x \in [0, 1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1 + n^3x^2} = 0 = f(x)$$

olup $f_n \to f = 0$ $(noktasal)$. Buradan

$$c_n = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{2nx}{1 + n^3x^2} - 0 \right| = \underset{x\in[0,1]}{maks} \left\{ \frac{2nx}{1 + n^3x^2} \right\}$$

olur.

$$g(x) = \frac{2nx}{1 + n^3x^2}$$

olmak üzere $g(0) = 0$, $g(1) = \dfrac{2n}{1+n^3}$ ve n sabit olmak üzere

$$g'(x) = \frac{2n\left(1+n^3x^2\right) - 2nx\left(2n^3x\right)}{\left(1+n^3x^2\right)^2}$$

olup $g'(x) = 0 \Rightarrow x = n^{\frac{-3}{2}} \in [0,1]$ yazılır. $g\left(n^{\frac{-3}{2}}\right) = \dfrac{2n\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{1+n^3\frac{1}{n^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ olacağından

$$c_n = maks\{0,\ \frac{2n}{1+n^3},\ \frac{1}{\sqrt{n}}\}\frac{1}{\sqrt{n}} = \longrightarrow 0,\ (n \to \infty)$$

olup $f_n \rightrightarrows f = 0$ (*düzgün*) elde edilir. Teorem 4 kullanılarak, (F_n) dizisinin $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı elde edilir.

Tanım 1. (Düzgün Sınırlılık): (f_n), A üzerinde düzgün sınırlıdır gerek ve yeter koşul her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in A$ için $|f_n(x)| \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır.

Örnek 4. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^2}$ ile tanımlı fonksiyon dizisi, $\mathbb{R}$' de düzgün sınırlı mıdır ?

Çözüm. Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left|\frac{nx^2}{1+n^2x^2}\right| \\ &= \frac{nx^2}{1+n^2x^2} \\ &< \frac{n}{n^2+\frac{1}{x^2}} \\ &< \frac{n}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

olup her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| < 1$ olacak biçimde $M = 1$ olduğundan (f_n) düzgün sınırlıdır.