3. DÜZGÜN YAKINSAKLIĞIN İNTEGRAL VE TÜREVLE İLİŞKİSİ

3.1. Düzgün yakınsaklık ve integral

$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ile tanımlı her bir (f_n) Riemann integrallenebilir olsun. Ayrıca $[a, b]$ aralığında $f_n \to f$ $(noktasal)$ olsun.

O halde,

1) f integrallenebilir mi?

2) f integrallenebilir olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

yazılabilir mi?

Bu bölümde bu soruya cevap aranacak ve yukarıdaki eşitliğin ne zaman gerçeklendiği incelenecektir.

Teorem 1. (f_n), $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi ve bu aralıkta $f_n \rightrightarrows f$ $(düzgün)$ olsun. O halde f fonksiyonu da bu aralıkta integrallenebilir olup

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

gerçeklenir.

Teorem 1 gösterir ki, düzgün yakınsaklık altında limit işlemi ve integral işlemi yer değiştirebilir.

Örnek 1. $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^2 - \dfrac{x}{n}$ ile tanımlı fonksiyon dizisi düzgün yakınsak mıdır ?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

eşitliği gerçeklenir mi ?

Çözüm. Her $x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^2 - \frac{x}{n}\right) = x^2 = f(x)$$

olup, $[0,1]$ aralığı üzerinde (f_n) dizisi, $f(x) = x^2$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır. **Teorem-1'** den

$$c_n = \underset{x\in[0,1]}{maks}\left|x^2 - \frac{x}{n} - x^2\right| = \underset{x\in[0,1]}{maks}\frac{|x|}{n} = \underset{x\in[0,1]}{maks}\left\{\frac{x}{n}\right\} = \frac{1}{n}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, yakınsama düzgündür.

O halde, soruda verilen eşitlik **Teorem-1** gereğince sağlanır. Gerçekten, her bir f_n, $[0,1]$ aralığında integrallenebilirdir.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(x^2 - \frac{x}{n}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

olup ayrıca

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

olduğu da elde edilir.

3.2. Düzgün yakınsaklık ve Türev

Her bir $(f_n), [a,b]$ aralığında türevli ve $f_n \rightrightarrows f$ $(düzgün)$ olsa bile f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında türevli olması gerekmez. $\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right)$ gerçeklenmek zorunda değildir.

Teorem-4: $I = [a,b]$ aralığı üzerinde f_n fonksiyonları sürekli türeve sahip olsun. Eğer, $f_n \to f$ $(noktasal)$ ve $f_n' \leftrightarrows g$ $(düzgün)$ ise $g = f'$ olmalıdır.

Örnek 2. $[0,1]$ aralığı üzerinde $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon dizisi için,

a) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ eşitliği gerçeklenir mi ?

b) (f_n') türev dizisi düzgün yakınsak mıdır ?

Çözüm: a) Öncelikle $\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]'$ değerini hesaplayalım. Her $x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0 = f(x)$$

olup, $[0,1]$ aralığında $f_n \to f = 0$ ($noktasal$). O halde $f(x) = 0$ sabit fonksiyondur. Yani

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = f'(x) = 0' = 0$$

bulunur. Diğer yandan

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} \Longrightarrow f_n'(x) = x^{n+1},\ \ x \in [0,1]$$

olacağından

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x < 1 \\ \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $x \in [0,1)$ için (a) şıkkındaki eşitlik gerçeklenir. Ancak $x = 1$ için gerçeklenmez. Çünkü

$$0 = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(1) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1) = 1.$$

olarak bulunur.

b) $f_n'(x) = x^{n+1}$ türev dizisi düzgün yakınsak değildir. Çünkü

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x < 1 \\ \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases} = f(x)$$

olup $[0,1]$ aralığında $f_n \longrightarrow f$ $(noktasal)$ gerçeklenir. Ancak bu f fonksiyonu $x=1$ noktasında süreksiz olduğundan **Teorem-2** gereğince yakınsama düzgün olamaz.