4. FONKSİYON SERİLERİNİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

Tanım 1. $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_k : D \to \mathbb{R}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi verilsin. $s_n = f_1 + f_2 + \ldots f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ ile tanımlı (s_n) dizisine $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisinin D üzerindeki kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_n) dizisi D üzerinde düzgün yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi D üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

Örnek 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ ile tanımlanan fonksiyon serisi $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ?

Çözüm. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ serisi $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de düzgün yakınsak $\Leftrightarrow$ $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ dizisi $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de düzgün yakınsak olmasıdır.

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} + \frac{1-x^3}{1-x} + \ldots + \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x}\left[1-x^2+1-x^3+\ldots+1-x^{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{1-x}\left[n-\left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1-x}\left[n-x^2\frac{1-x^n}{1-x}\right]
\end{aligned}$$

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ile tanımlı her bir (f_n) Riemann integrallenebilir olsun. Ayrıca $[a,b]$ aralığında $f_n \to f$ olup her $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x}\left[n-x^2\frac{1-x^n}{1-x}\right] \\
&= \frac{1}{1-x}\left[\lim_{n\to\infty} n - \frac{x^2}{1-x}\lim_{n\to\infty}(1-x^n)\right] \\
&\infty
\end{aligned}$$

olduğundan (s_n) kısmi toplamlar dizisi noktasal yakınsak değildir. O halde $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ serisi de noktasal yakınsak olamaz. Noktasal yakınsak değilse, düzgün yakınsak da değildir.

Örnek 2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}}$ serisi $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ?

Çözüm. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi yazılırsa

$$
\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}} = \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \ldots + \frac{x^n}{2^{n+1}} \\
&= \frac{x}{4}\left[1 + \frac{x}{2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}}\right] \\
&= \frac{x}{4}\left[\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}\right] \\
&= \frac{x}{4-2x}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^n\right], \; x \in [0,1]
\end{aligned}
$$

olup, her $x \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{4}\left[\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}\right] \\
&= \frac{x}{4}\frac{2}{2-x} \\
&= \frac{x}{4-2x} \\
&= s(x)
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde (s_n) dizisi, $s(x) = \frac{x}{4-2x}$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır. Şimdi düzgün yakınsaklığını gösterelim.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \underset{x\in[0,1]}{maks}\left|\frac{x}{4-2x}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^n\right] - \frac{x}{4-2x}\right| \\
&= \underset{x\in[0,1]}{maks}\left|\frac{x}{4-2x} - \left(\frac{x}{2}\right)^n\right| \\
&= \underset{x\in[0,1]}{maks}\left\{\frac{x}{4-2x}\frac{x^n}{2^n}\right\} \\
&= \underset{x\in[0,1]}{maks}\left\{\frac{x^{n+1}}{2(2-x)}\right\} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0, \; n \to \infty
\end{aligned}
$$

olduğundan yakınsama düzgündür. (s_n) kısmi toplamlar dizisi, $[0,1]$ üzerinde $s(x) = \frac{x}{4-2x}$ ile tanımlı fonksiyona düzgün yakınsak olur. Dolayısıyla, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ serisi de aynı s fonksiyonuna, $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Teorem 1. (Weierstrass Testi): Her $x \in A$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq a_n$ ve $\sum_n a_n < \infty$ olacak şekilde bir (a_n) dizisi varsa, $\sum f_n$ fonksiyon serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

Örnek 3. Aşağıda verilen fonksiyon serilerinin karşılarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün yakınsak olduklarını gösteriniz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n, \quad I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-nx}, \quad I = [0,1]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n}, \quad I = [-1,1]$

Çözüm. a) Verilen fonksiyon serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)\, x^k = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)\, x^n$$

olup buradan ilerlemek oldukça zordur. Her $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |(n+1)\, x^n| \\ &\leq \frac{n+1}{2^n} \\ &= a_n \end{aligned}$$

olacağından

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

sayı serisi elde edilir. Oran testinden

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2\,(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ serisi yakınsaktır. O halde Weierstrass Testi gereğince verilen fonksiyon serisi $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

b) Her $x \in [0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \left|\frac{x^n}{n!}e^{-nx}\right| \\
&\leq \frac{|x|^n}{n!} \\
&\leq \frac{1}{n!} \\
&= a_n
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

serisi için

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ serisi yakınsaktır. O halde Weierstrass Testi gereğince verilen fonksiyon serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

c) Her $x \in [-1,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n} \right| \\ &= \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n} \\ &< \frac{1}{3^n} \\ &= a_n \end{aligned}$$

bulunur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ geometrik seri olup, $r = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan yakınsaktır. O halde verilen fonksiyon serisi, Weierstrass Testi gereğince $[-1,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Örnek 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ serisi, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır ?

Çözüm. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = a_n \end{aligned}$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ serisi harmonik seri olup, $\alpha = \frac{4}{3} > 1$ için yakınsaktır. O halde verilen fonksiyon serisi Weierstrass Testi gereğince $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Örnek 5. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \sin x \right)^k$ serisi $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$ aralığında düzgün yakınsak mıdır ?

Çözüm. Her $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ için

$$\begin{aligned} |f_k(x)| &= \left|\left(\frac{3}{2}\sin x\right)^k\right| \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6}\right)^k \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= a_k \end{aligned}$$

olup $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ serisi geometrik serisi $r = \frac{3}{4} < 1$ olduğundan yakınsaktır. O halde verilen fonksiyon serisi Weierstrass Testi gereğince $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Teorem 2. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve $c \in [a,b]$ olmak üzere, her k için $\lim_{x\to c} f_k(x) = c_k$ mevcut ise

$$\lim_{x\to c}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to c} f_k(x)$$

gerçeklenir.

Örnek 5. $\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$ limitini hesaplayınız ($x \in [0,1]$).

Çözüm. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$ ile tanımlı fonksiyon serisinin, $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

Her $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left|\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}\right| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \\ &= a_n \end{aligned}$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ serisi geometrik seri olup, $r = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla verilen fonksiyon serisi Weierstrass Testi gereğince $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Ayrıca, her n için

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

limiti mevcuttur. O halde, **Teorem-2** gereğince limit ve sonsuz toplam yer değiştirebilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right\} \\
&= 2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 6. $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ limitini hesaplayınız ($x \in [0,1]$).

Çözüm.

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n(n+1)}$$

denilirse her n için

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos nx}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

limiti mevcuttur. Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ serisinin, $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

Her $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left|\frac{\cos nx}{n(n+1)}\right| \\ &\leq \frac{1}{n^2+n} \\ &< \frac{1}{n^2} \\ &= a_n \end{aligned}$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ harmonik serisi $\alpha = 2 > 1$ olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ serisi Weierstrass Testi gereğince $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

O halde, limit ile sonsuz toplam yer değiştirebilir.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{\cos nx}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.