7. TAYLOR SERİLERİ

Tanım 1. f fonksiyonu $x=a$ noktasında $n-$inci mertebeden türevlenebilir olduğunda $p(a)=f(a)$, $p^{'}(a)=f^{'}(a)$,..., $p^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$ eşitliklerini sağlayan ve derecesi n den büyük olmayan birtek p polinomu vardır ve bu polinom

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

formu ile verilebilir. Bu p polinomuna f fonksiyonu tarafından $x=a$ noktasında noktasında üretilen $n-$inci dereceden Taylor polinomu denir.

Tanım 2. f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (1)$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor Serisi adı verilir.

Her mertebeden türevlenebilen bir f fonksiyonu verildiğinde

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $K_n(x)$, $f(x)$ ile onun Taylor polinomu arasındaki farkı göstermektedir. Yukarıdaki eşitlikten $n\to\infty$ için limit alındığında (1) serisinin $f(x)$ değerine yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty}K_n(x)=0$ olmasıdır.

Örnek 1. $f(x)=b^x$, $b\neq 1$, $b>0$ ile tanımlı f fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor seri açılımını bulunuz.

Çözüm. $x=0$ noktasındaki Taylor seri açılımına özel olarak Maclaurain seri açılımı denir.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x) \qquad (1)$$

ifadesinde bilinmeyen değerleri bulalım.

$$\begin{aligned} f(x) &= b^x \\ f'(x) &= b^x \ln b \\ f''(x) &= b^x (\ln b)^2 \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= b^x (\ln b)^k \end{aligned}$$

olup $f^{(k)}(0) = (\ln b)^k$ olarak bulunur.

Şimdi

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \\ &= \frac{(\ln b)^{n+1} b^c}{(n+1)!} x^{n+1} \end{aligned}$$

olmak üzere $0 < x < c$ ve $x < c < 0$ aralıklarında $K_n(x)$ ifadesini inceleyelim.

i) $0 < x < c$ olsun. Burada

$$\sum_{k=1}^{\infty} |K_n(x)| \text{ yakınsak } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |K_n(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} K_n(x) = 0$$

olduğundan verilen aralıkta $\sum_{k=1}^{\infty} |K_n(x)|$ serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Bunun için Oran Testi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{K_{n+1}(x)}{K_n(x)} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\ln b)^{n+2} b^c x^{n+2} (n+1)!}{(n+2)! x^{n+1} b^c (\ln b)^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\ln b . x|}{n+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $0 < 1$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} |K_n(x)|$ serisi her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır. Yani, $\lim_{n\to\infty} K_n(x) = 0$.

ii) Benzer şekilde $x < c < 0$ için de yapılır.

O halde (1) eşitliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$f(x) = b^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln b)^k}{k!} x^k, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

bulunur.

Örnek 2. $f(x) = \cos ax$ ile tanımlı fonksiyonun $x = 0$ civarındaki Taylor seri açılımını bulunuz.

Çözüm.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k + K_n(x) \tag{2}$$

ifadesinde bilinmeyen değerleri bulalım. Öncelikle

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos ax \\
f'(x) &= -a \sin ax = a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) \\
f''(x) &= -a^2 \cos ax = a^2 \cos\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right) \\
f'''(x) &= a^3 \sin ax = a^3 \cos\left(ax + \frac{3\pi}{2}\right) \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= a^k \cos\left(ax + \frac{k\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

olup $f^{(k)}(0) = a^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ olarak bulunur. Şimdi

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{a^{n+1} \cos\left(ac + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}
\end{aligned}$$

olmak üzere $0 < x < c$ ve $x < c < 0$ aralıklarında $K_n(x)$ ifadesini inceleyelim.

i) $0 < x < c$ olsun. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |K_n(x)|$ serisinin yakınsaklığına bakıldığında

$$\begin{aligned} |K_n(x)| &= \left| \frac{a^{n+1} \cos\left(ac + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &\leq \left| \frac{a^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \end{aligned}$$

olup Oran testi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{K_{n+1}(x)}{K_n(x)} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a^{n+2} x^{n+2} (n+1)!}{(n+2)! a^{n+1} x^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|ax|}{n+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $0 < 1$ olduğundan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |K_n(x)|$ serisi her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(x) = 0$.

ii) Benzer şekilde $x < c < 0$ için de yapılır.

O halde (2) eşitliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$f(x) = \cos ax = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

bulunur.

Örnek 3. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x - 1$ ile verilen fonksiyonu $(x-1)$' in kuvvetlerine göre açınız.

Çözüm. $(x-1)$' in kuvvetlerine göre açmak demek f fonksiyonunun $x = -1$ civarındaki

Taylor açılımını bulmak demektir. O halde

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4+4x^3-3x^2+x-1 \Longrightarrow f(-1)=-8 \\
f'(x) &= 4x^3+12x^2-6x+1 \Longrightarrow f'(-1)=15 \\
f''(x) &= 12x^2+24x-6 \Longrightarrow f''(-1)=-18 \\
f'''(x) &= 24x+24 \Longrightarrow f'''(-1)=0 \\
f^{(4)}(x) &= 24 \Longrightarrow f^{(4)}(-1)=24 \\
f^{(5)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

olup $k \geq 5$ için $f^{(k)}(x)=0$ bulunur. Buradan $f^{(k)}(-1)=0$ olur. Buradan

$$K_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

ifadesi $n \geq 4$ sıfıra eşittir. Yani

$$(K_n(x))=(K_1(x), K_2(x), K_3(x), K_4(x), K_5(x), \ldots)$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(x)=0$ bulunur. Dolayısıyla

$$f(x)=\sum_{k=o}^{n}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k+K_n(x)$$

ifadesinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=o}^{\infty}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k \\
&= f(-1)+\frac{f'(-1)(x+1)}{1!}+\frac{f''(-1)(x+1)^2}{2!}+\frac{f'''(-1)(x+1)^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(-1)(x+1)^4}{4!}+\ldots \\
&= -8+15(x+1)-9(x+1)^2+(x+1)^3
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.