9. FOURİER SERİ AÇILIMLARI

Tanım 1. **(Fourier serisi):** 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$,... fonksiyonları $[-\pi, \pi]$ aralığında ortogonal bir sistem oluştursunlar. Ortak 2π periyoduna sahip olan bu fonksiyonlar yardımı ile oluşturulan

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrik serisi yakınsak ise, onun toplamı da 2π peryotlu periyodik bir $f(x)$ fonksiyonu olacaktır. Bu serinin yakınsadığı periyodik bir $f(x)$ fonksiyonunun bulunması halinde

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

serisine Fourier serisi, a_0, a_n ve b_n katsayılarına da Fourier katsayıları denir.

2π periyotlu bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsayan bir trigonometrik serinin bulunması için, $f(x)$' in Dirichlet koşullarını gerçeklemesi yeterlidir.

Dirichlet Koşulları

1) f, 2π periyotlu periyodik bir fonksiyon olsun.

2) f, $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli olsun.

3) f, $[-\pi, \pi]$ aralığında sonlu sayıda ekstremuma sahip olsun.

O taktirde f fonksiyonu, x' in her değeri için yakınsak olan ve toplamı

a) x bir süreklilik noktası ise $f(x)$' e

b) x bir düzgün süreksizlik noktası ise $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, ye

c) Aralığın uç noktalarında düzgün yakınsaklığı garanti etmek için

$$f(-\pi) = f(\pi) = \left(\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}\right)$$

ifadesine eşit olan bir Fourier serisine açılabilir.

2π Peryotlu bir fonksiyonun Fourier serisi

$(-\pi, \pi)$ aralığında Dirichlet koşullarını gerçekleyen 2π peryotlu periyodik bir fonksiyon

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

şeklinde bir Fourier serisine açılabilir. Burada Fourier katsayıları $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 5. $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(x) = x + |x|$ fonksiyonu ile çakışan 2π periyotlu fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.

$$f(x) = \begin{cases} 2x &, \quad x > 0 \\ 0 &, \quad x \leq 0 \end{cases}$$

olmak üzere öncelikle Fourier katsayılarını belirleyelim.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x + |x|) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x dx \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left\{(-1)^n - 1\right\} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ \frac{-4}{\pi n^2} & , \quad n = 2k-1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx \\
&= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

olup istenilen Fourier serisi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x + \frac{2}{n}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin nx
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Örnek 6. $f(x) = x + x^2$, $-\pi < x < \pi$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ ile çakışan 2π periyotlu periyodik $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz ve bu seriden yararlanarak

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Öncelikle Fourier katsayılarını bulalım.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+x^2\right)dx \\ &= \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+x^2\right)\cos nx dx \\ &= \frac{4.(-1)^n}{n^2},\ n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+x^2\right)\sin nx dx \\ &= \frac{2.(-1)^{n+1}}{n},\ n=1,2,\ldots \end{aligned}$$

olup Fourier serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \\ &= \frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(2\cos nx-n\sin nx) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 7.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < \pi \\ 2 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Fourier serisini bulunuz.

Çözüm. Öncelikle Fourier katsayılarını bulalım.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi}(2)\,dx\right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx + 2\int_{0}^{\pi}\cos nx dx\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx + 2\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right\} \\ &= \frac{3}{\pi n}\{1-(-1)^n\} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ \frac{6}{\pi(2k-1)} & , \quad n = 2k-1 \end{cases} \quad , \; k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

olup istenilen Fourier serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin(2k-1)x \end{aligned}$$

olarak elde edilir.