10. TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR İÇİN FOURİER SERİLERİ

Örnek 1. $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(x) = |\sin x|$ fonksiyonu ile çakışan periyodik fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.

$$f(x) = |\sin x| = f(-x)$$

olduğundan f çift bir fonksiyondur Dolayısıyla $n = 1, 2, \ldots$ için $b_n = 0$ olur. a_0 ve a_n katsayılarını bulalım.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\}\,dx \\ &= \frac{2}{\pi(n^2-1)}\left((-1)^{n+1} - 1\right) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k-1 \\ -\frac{4}{\pi(4k^2-1)} & , \quad n = 2k \end{cases} , \; k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

olup istenilen Fourier serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ &= \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(1-4k^2)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2. $(-\pi,\pi)$ aralığında $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Çözüm.

$$f(-x)=-\frac{|x|}{x}=-f(x)$$

olduğundan f fonksiyonu tek fonksiyondur. Dolayısıyla, $n=1,2,\ldots$ için a_0, $a_n=0$ olur. Buradan

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x>0 \\ -1 & , \quad x<0 \end{cases}$$

olup b_n katsayısını bulalım.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx \\ &= -\frac{2}{\pi}\left((-1)^n-1\right) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n=2k \\ \frac{4}{\pi(2k-1)} & , \quad n=2k-1 \end{cases} , \; k=1,2,\ldots \end{aligned}$$

ve istenilen Fourier serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3. $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(x) = \pi - 2|x|$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Çözüm.

$$f(-x) = \pi - 2|x| = f(x)$$

olduğundan f fonksiyonu çift fonksiyondur. Dolayısıyla $n = 1, 2, \ldots$ için $b_n = 0$ olur. Buradan

$$f(x) = \begin{cases} \pi + 2x & , \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - 2x & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

olup a_0 ve a_n katsayılarını bulalım.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - 2x)\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - 2x)\cos nx dx \\ &= -\frac{4}{\pi n^2}\left\{(-1)^n - 1\right\} \\ &= \begin{cases} \frac{8}{\pi(2k-1)^2} & , \quad n = 2k-1 \\ 0 & , \quad n = 2k \end{cases} \end{aligned}$$

olup istenilen Fourier serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi (2k-1)^2} \cos (2k-1) x \end{aligned}$$

olarak elde edilir.