13. YARIM ARALIKTA AÇILIMLAR

Bazı uygulama alanlarında $(-L, L)$ aralığı yerine bunun yarısı olan $(0, L)$ aralığında tanımlanmış olan bir f f f fonksiyonunun Fourier açılımına ihtiyaç duyulur. Bu durumda $(-L, 0)$ aralığı simetrik $(-L, L)$ aralığının diğer yarısı olur. $(0, L)$ aralığında tanımlanan bir f fonksiyonunu $(-L, 0)$ aralığında istediğimiz şekilde tanımlayıp Fourier serisine açabiliriz. Bu tanımlamalrdan önemli olan iki tanesi bu bölümde verilecektir.

1) f fonksiyonu $(-L, L)$ aralığına çift fonksiyon olarak genişletilebilir. Bunu $F_C(x)$ ile gösterirsek

$$F_C(x) = \begin{cases} f(-x) & , \quad -L < x < 0 \\ f(x) & , \quad 0 < x < L \end{cases}$$

yazılır. F_c fonksiyonunun Fourier serisi ve Fourier katsayıları sırasıyla

$$F_C(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

olurlar. (1) serisine $(0, L)$ yarım aralığında f fonksiyonunun Fourier cosinüs serisi denir.

2) f fonksiyonu $(-L, L)$ aralığına tek fonksiyon olarak genişletilebilir. Bunu $F_T(x)$ ile gösterirsek

$$F_T(x) = \begin{cases} -f(-x) & , \quad -L < x < 0 \\ f(x) & , \quad 0 < x < L \end{cases}$$

yazılır. $F_T(-x) = -F_T(x)$ tek fonksiyon özelliğine sahip olan F_T fonksiyonunun Fourier serisi ve Fourier katsayıları sırasıyla

$$F_T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

olurlar. (1) serisine $(0, L)$ yarım aralığında f fonksiyonunun Fourier cosinüs serisi denir.

Örnek 1. $f(x) = 2 \;\; , \quad 0 < x < 3$ olarak verilen fonksiyonun

a) Fourier sinüs serisini **b)** Fourier cosinüs serisini

bulunuz.

Çözüm. a) $(0,3)$ yarım aralığında verilen bu fonksiyon için tam aralık $(-3,3)$ olup, $peryot = T = 3-(-3) = 6$ dır. $L = 3$ olur. Fourier sinüs serisi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

formunda olmalıdır. b_n Fourier katsayıları,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 2\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^3 \\
&= \left[\frac{-4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3 = \frac{4}{n\pi}[1-(-1)^n] \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ \dfrac{8}{(2k+1)\,\pi} & , \quad n = 2k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

olduklarından aranılan Fourier sinüs serisi

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{3}\right)$$

olur.

b) $0 < x < 3$ yarım aralığında $f(x) = 2$ fonksiyonunun Fourier cosinüs serisi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

formunda olmalıdır. Fourier katsayıları,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 2dx = \frac{4}{3}x\Big|_0^3 = 4 \\
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 2\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{4}{3}\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^3 = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

olduğundan istenilen Fourier cosinüs serisi;

$$f(x) = 2$$

dir.

Alıştırmalar

1. $0 < x < 3$ için $f(x) = x$ fonksiyonu verilsin.

a) $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz ve periyodik fonksiyonun grafiğini çiziniz.

b) $f(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs serisini bulunuz .

c) $f(x)$ fonksiyonunun Fourier cosinüs serisini bulunuzπ.

2. $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. Verilen fonksiyonun

a) Fourier serisini bulunuz ve periyodik fonksiyonun grafiğini çiziniz.

b) Fourier sinüs serisini bulunuz.

c) Fourier cosinüs serisini bulunuz.

3. $f(x) = \alpha x - x^2 \;\;,\;\; 0 \leq x \leq \alpha \;\; (\alpha \in \mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun

a) Fourier sinüs serisini **b)** Fourier cosinüs serisini

bulup grafiklerini çiziniz.