14. DİRİCHLET İNTEGRAL FORMÜLÜ-BESSEL EŞİTSİZLİĞİ VE PARSEVAL ÖZDEŞLİĞİ

14.1. Dirichlet İntegral Formülü

Verilen bir f fonksiyonuna karşılık gelen 2π peryotlu Fourier serisinin,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve Fourier katsayılarının,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad ; \quad k = 0,1,2,... \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad ; \quad k = 1,2,... \end{aligned}$$

olduklarını biliyoruz. Şimdi f fonksiyonunun Fourier serisinin

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

n-yinci kısmi toplamını gözönüne alalım. a_k ve b_k Fourier katsayıları $s_n(x)$ de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right)\cos kx + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right)\sin kx\right\} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx)\right]dt \end{aligned} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt \tag{3}$$

olur. Köşeli parantez içindeki toplamı

$$D_n(t-x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)$$

ile gösterelim. Bu toplamı bulmak için,

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha \equiv \sin(k+\frac{1}{2})\alpha - \sin(k-\frac{1}{2})\alpha$$

trigonometrik özdeşliğinde, k ya sıra ile 1 den n ye kadar değerler verip elde ediken eşitlikleri taraf tarafa topladıktan sonra her iki tarafa $\sin\frac{\alpha}{2}$ eklediğimizde

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha\right] &= \sin\frac{\alpha}{2} + \left[\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right] + ... + \left[\sin(n+\frac{1}{2})\alpha - \sin(n-\frac{1}{2})\alpha\right] \\ &= \sin(n+\frac{1}{2})\alpha \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$D_n(\alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{4}$$

bulunur. $D_n(\alpha)$ ifadesine *Dirichlet toplamı* ya da *Dirichlet çekirdeği* denir. (3) de $\alpha = t-x$ konularak elde edilen $D_n(t-x)$ in değeri (2) de yerine konulursa

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})(t-x)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\,dt \tag{5}$$

bulunur. Bu integralde $t-x=s$ değişken değiştirmesi yapılarak,

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)\,\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})s\right]}{2\sin(\frac{s}{2})}\,ds \tag{6}$$

elde ederiz. $f(x)$, 2π peryotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan,

$$\phi(s) = f(s+x)\,\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})s\right]}{2\sin(\frac{s}{2})} \tag{7}$$

de 2π peryotlu periyodik bir fonksiyondur. O halde (5) ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s+x)\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})s\right]}{2\sin(\frac{s}{2})}\,ds \tag{8}$$

$s_n(x)$ toplamı için bulunan (7) formülü, *Dirichlet integral formülü* olarak bilinir. Şimdi (6) eşitliğinde verdiğimiz ϕ nin 2π peryotlu olduğunu görelim. f nin 2π peryotlu olduğu gözönünde tutularak,

$$\begin{aligned}
\phi\,(s+2\pi) &= f\left[(s+2\pi)+x\right]\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})\,(s+2\pi)\right]}{2\sin\left(\dfrac{s+2\pi}{2}\right)} \\
&= f\left[(s+x)+2\pi\right]\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})s+(2n+1)\,\pi\right]}{2\sin\left(\dfrac{s}{2}+\pi\right)} \\
&= f\,(s+x)\,\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})s\right]\cos\,(2n+1)\,\pi}{2\sin(\frac{s}{2})\,\cos\pi} \\
&= f\,(s+x)\,\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})s\right]}{2\sin(\frac{s}{2})} = \phi\,(s)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde ϕ, 2π peryotludur. Diğer yandan (6) eşitliğinin $f\equiv 1$ ve $s=\alpha$ özel hali (3) deki $D_n(\alpha)$ ya karşılık geldiğinden, $D_n(\alpha)$ Dirichlet çekirdeği de 2π peryotlu periyodik bir fonksiyondur.

14.2. Bessel Eşitsizliği ve Parseval Özdeşliği

$(-\pi, \pi)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

Fourier serisini ve

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

n-yinci kısmi toplamlamını göz önüne alalım. Her n için,

$$\left[f(x)-s_n(x)\right]^2\geq 0$$

olacağından

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-s_n(x)\right]^2 dx\geq 0 \tag{9}$$

olur. (8) eşitsizliği açık şekilde yazılıdığında,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-s_n(x)\right]^2 dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)\right]^2 dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,s_n(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left[s_n(x)\right]^2 dx\geq 0$$

olur. Fourier katsayıları için bilinen eşitliklerden ve trigonometrik fonksiyonlar için verilen ortogonallik bağıntılarından kullanılarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,s_n(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]dx\\ &= \frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}s_n^2(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^2 dx\\ &= \frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right).\end{aligned}$$

Buradan

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \left[\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right] \geq 0$$

ifadesini ve

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx \tag{10}$$

eşitsizliğini buluruz. (9) eşitsizliğinin sağ yanı n den bağımsız olduğundan,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx \tag{11}$$

elde ederiz. (10) bağıntısına *Bessel Eşitsizliği* denir. (9) nin sol yanı üstten sınırlı olduğundan,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right)$$

serisi yakınsaktır. Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfır olacağından,

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0 \qquad , \qquad \lim_{k \to \infty} b_k = 0$$

sağlanmalıdır. Bu demektir ki, bir Fourier serisinde Fourier katsayıları sıfıra yaklaşırlar. Bir f fonksiyonu için,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \right) \right]^2 dx = 0 \tag{12}$$

oluyorsa, f fonksiyonunun Fourier serisi $f(x)$ e yakınsaktır denir. (11) eşitliğinin geçerli olması halinde (10) Bessel eşitsizliği de eşitlik olarak geçerlidir. Aşağıda verilen bu eşitliğe de

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$$

Parseval Özdeşliği denir.