1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonları kesirli analizde çok yaygın kullanım alanı bulunan, oldukça önemli bir fonksiyondur. e^z üstel fonksiyonu tamsayı basamaktan diferensiyel denklemler teorisinde oldukça önemli rol oynar. Üstel fonksiyonun bir parametreli genellemesi

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

formülü ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir.

Özel olarak $\alpha = 1$ ve $\alpha = 2$ durumunda

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

ve

$$E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(\sqrt{z})$$

dir.

İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

şeklinde verilir. Bu gösterime bazen Mittag-Leffler tipi fonksiyon da denir.

Böylece

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

bulunur ve en genelleştirirsek

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\{e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\}$$

elde edilir.

Hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs, Mittag-Leffler fonksiyonunun özel durumlarıdır.

$$E_{2,1}\left(z^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma\left(2k+1\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

$$E_{2,2}\left(z^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma\left(2k+2\right)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}$$

dir.

1.4 Wright Fonksiyonu

Wright fonksiyonu, lineer kısmi kesirli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde önemli rol oynamaktadır. Kesirli difüzyon ve dalga denklemleri örnek gösterilebilir.

Bu fonksiyon, iki parametreli $E_{\alpha,\beta}\left(z\right)$ Mittag-Leffler fonksiyonuyla ilişkilidir.

Wright fonksiyonu

$$W\left(z;\alpha,\beta\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}$$

şeklinde tanımlanır.

1.4.1 İntegral Gösterimi

Bu fonksiyon;

$$W\left(z;\alpha,\beta\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{H_a} z^{-\beta} e^{\tau+\tau^{-\sigma}}\, d\tau$$

integraliyle gösterilebilir. Burada H_a, Henkel çevresini ifade etmektedir.