### 2.2.2 Keyfi Basamaktan İntegraller:

$n-$ katlı integrasyon kavramını, $n$ nin tamsayı olmayan değerlerine göre genişletmek için $f^{(-n)}(t)$ Cauchy formülü ile başlamalıyız. Bu formüldeki tamsayı $n$ yerine reel $p > 0$ alırsak

$$_aD_t^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau$$

elde ederiz.

Teorem: $t \geq 0$ için $f(t)$ sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{p\to 0_a} D_t^{-p}f(t) = f(t)$$

dir. Dolayısıyla

$$_aD_t^0 f(t) = f(t)$$

dir

Teorem:

Eğer , $t \geq a$ için $f(t)$ sürekli ise yukarıda tanımlanan keyfi reel basamaklı integrasyon

$$_aD_t^{-p}(_aD_t^{-q}f(t)) =_a D_t^{-p-q}f(t)$$

eşitliğini sağlar.

Açıkça $p$ ve $q$ yer değiştirebilir. Yani

$$_aD_t^{-p}(_aD_t^{-q}f(t)) =_a D_t^{-q}(_aD_t^{-p}f(t)) =_a D_t^{-p-q}f(t)$$

dir.

Bu durum, tamsayı basamaktan türevlerin şu özelliği ile benzerdir:

$$\frac{d^m}{dt^m}(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) = \frac{d^n}{dt^n}(\frac{d^m f(t)}{dt^m}) = \frac{d^{m+n}f(t)}{dt^{m+n}}.$$

Keyfi Basamaktan Türevler:

$(k-n)$ tamsayı basamaktan türevler için olan $_aD_t^{-p}(_aD_t^{-q}f(t))$ gösterimi, tamsayı olmayan basamaktan diferensiyel kavramına genişletmek için bize yardımcı olur. Bu durumda $k$ tamsayısı ve $n$ tamsayı yerine reel $\alpha$ olarak $k-\alpha > 0$ basamaktan diferensiyel elde ederiz. Bu bize

$$_aD_t^{k-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \qquad (0 < \alpha \leq 1)$$

verir. Burada kısıtlama sadece $\alpha$ içindir ve bu $\alpha > 0$ olmasıdır. Ancak, bu kısıtlama yerine genelliği bozmadan $0 < \alpha \leq 1$ durumu alınabilir.

$p = k - \alpha$ ile gösterilirse ${}_aD_t^{k-\alpha} f(t)$ ifadesini

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau, \qquad (k-1 \leq p < k) $$

veya

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} ({}_aD_t^{-(k+p)} f(t)), \qquad (k-1 \leq p < k) $$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer $p = k-1$ ise, $(k-1)$ inci basamaktan bilinen tamsayı basamaktan türev elde ederiz.

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{k-1} f(t) &= \frac{d^k}{dt^k} ({}_aD_t^{-(k-(k-1))} f(t)) \\ &= f^{(k-1)}(t). \end{aligned} $$

Ayrıca $\frac{d^m}{dt^m}(\frac{d^n f(t)}{dt^n})$ den $p = k \geq 1$ ve $t > a$ için

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} ({}_aD_t^0 f(t)) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t) $$

olduğunu görürüz. Bu da $t > a$ için $p = k > 1$ basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi olarak bilinen $k$. basamaktan türeve denk gelmektedir.

### 2.2.3 Riemann-Liouville Kesirli Türevinin Özellikleri:

1) $p > 0$ ve $t > a$ için

$$ {}_aD_t^p ({}_aD_t^{-p} f(t)) = f(t) $$

dir. Bu da Riemann-Liouville kesirli diferansiyel operatörün aynı $p$. basamaktan Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün sol tersi anlamına gelmektedir.

2) $k-1 \leq p < k$ olmak üzere

$$ {}_aD_t^{-p} ({}_aD_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^{k} \left[ {}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} $$

dir.

3) $f(t)$ sürekli olmak üzere

$$ {}_aD_t^p ({}_aD_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{p-q} f(t) $$

dır. Eğer $p \geq q \geq 0$ ise ${}_aD_t^{p-q} f(t)$ türevi mevcuttur.

4)

$$ {}_aD_t^{-p} ({}_aD_t^q f(t)) = {}_a D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^{k} \left[ {}_aD_t^{q-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} $$

dir.