2.2.7 Grünwald-Letnikov Yaklaşımıyla İlişkisi:

Eğer $0 \leq m-1 \leq p < m \leq n$ ise $a < t < T$ için

$$ {}_aD_t^p f(t) = {}_a D_t^p f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-m+1}} d\tau $$

dir.

Gerçekten; yukarıdaki ifadenin sağ kısmı Grünwald-Letnikov türevine eşittir. Diğer taraftan

$$ \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \right\} $$

olarak yazılabilir. Taraf tarafa m integrasyondan sonra bu bize ${}_aD_t^p f(t)$ Riemann-Liouville formunu verir.

$$ \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \right\} = \frac{d^m}{dt^m} \{ {}_aD_t^{-(m-p)} f(t) \} = {}_a D_t^p f(t). $$

Eğer $f(t)$ sürekli ve $f'(t)$, $[a,T]$ aralığında integrallenebilir ise, her bir p $(0 < p < 1)$ için Riemann-Liouville ve Grünlwald-Letnikov türevlerinin her ikiside mevcuttur ve

$$ {}_aD_t^p f(t) = {}_a D_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau $$

şeklinde yazılabilir.

Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville tanımları arasındaki ilişki, uygulama problemlerini formüle etmek için, kesirli türevleri el ile hesaplamak için ve kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için başlangıç-değer probleminin fiziksel anlamlarının formülasyonu için çok önemlidir.