4 KESİRLİ TÜREVLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

$s \in \mathbb{C}$ olmak üzere bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s) = \pounds\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır.

Ters Laplace dönüşümü de

$$f(t) = \pounds^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \mathrm{Re}(s) > c_0$$

dir.

$f(t)$ ve $g(t)$ nin konvolüsyonu

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

şeklindedir.

$$\pounds\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

dir.

$n \epsilon \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \pounds\{f^n(t)\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

dır.

4.1 Riemann Liouville Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

Riemann Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli integralinin Laplace dönüşümü

$$\pounds\{{}_0D_t^{-p} f(t)\} = \pounds\{{}_0D_t^{-p} f(t)\} = s^{-p} F(s)$$

dir.

Riemann Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü ise

$$\pounds\{{}_0D_t^{p} f(t)\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D_t^{p-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad n-1 \le p < n$$

şeklindedir.

4.2 Caputo Türevinin Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}\{{}_0^cD_t^p f(t)\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0)$$

dır.