

7. ENİNE DEMET DİNAMIĞI-I

7.1. Temel Tanımlar

İvmelendirme: Bir hızlandırıcıda yüklü parçacıklar üzerine uygulanan E elektrik alanı sayesinde parçacıkların kinetik enerjileri artırılır ve ivmelenme sonucunda yüklü parçacıkların enerjisi ve momentumları zamanla artar.

$$\frac{dp}{dt} = eE \quad (7.1)$$

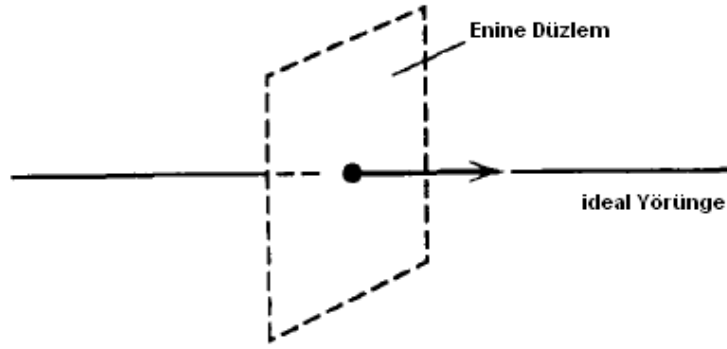
Bükme: Bir hızlandırıcıda yüklü parçacıklar yörünge düzlemine dik olarak uygulanan manyetik alan etkisi altında, belli bir ρ yarıçapı ile arzu edilen doğrultuya bükülüp yönlendirilebilir.

$$\frac{p}{e} = B\rho \quad (7.2)$$

Odaklama: Bir hızlandırıcıda demet üzerine dört kutuplu (kuadropol) magnet aracılığı ile x,y düzlemi içinde uygulanan enine manyetik kuvvetler demeti ideal yörünge etrafında odaklama etkisi ortaya koyarlar.

7.2. Enine Demet Dinamiğinin İlkeleri

Yüklü parçacıkların hareketi esnasında enerjide (hızda) yaşanan değişimleri boyuna yönde (s) hareketle ifade edebiliriz. Diğer iki yön ise hareket yönüne dik olan enine x,y yönleridir. Enine dinamik bu nedenle (x,y) düzlemi içinde gelişmekte ve analiz edilmektedir.



Şekil 7.1. Bir parçacığın hareketinde enine (x,y) ve boyuna (s) serbestlik dereceleri

Bir hızlandırıcı sisteminde yüklü parçacıkların hareketi sırasında mutlaka enine kararlılık kavramının incelenmesi gerekmektedir. Kararlılık, ideal yörünge etrafına sınırlandırılmış bir enine salınım hareketi ile ifade edilmektedir. Bu salınımlar ENİNE SALINIMLAR (BETATRON SALINIMLARI) olarak adlandırılmaktadır. Literatürde enine salınımlar için genel olarak “transverse oscillations” veya “betatron oscillations” kavramları ile karşılaşılır.

Doğrusal bir hızlandırıcıda (LİNAK) farklı momentumlara sahip parçacıklar aynı ideal yörüngeleri takip ederler. Ancak dairesel hızlandırıcılarda (örn. Sinkrotron) kapalı yörüngelerde dolanan ve yörüngeden sapmış parçacıkların momentumları ideal yörüngede dolanan parçacıkların momentumundan farklıdır. Lineer (doğrusal) analizlerde bu sapmaların genlikleri ve enine hız bileşenleri ilerleme hızına göre çok küçük kabul edilir. Bir hızlandırıcıda ENİNE geri çağırıcı kuvvetleri lineer olarak inceleyebilmek için x,y enine koordinatlarını kullanabiliriz.

Yüksek enerjili hızlandırıcılar için dairesel hızlandırıcılardaki geri çağırıcı ve bükücü (eğici) kuvvetler elektrik alanlar ile değil manyetik alanlar tarafından oluşturulmaktadır. Rölativistik olmayan parçacıklar için düşük hız limit durumunda elektrostatik alanlar kullanılabilir. Ancak ışık hızına yakın hızlarda hareket eden parçacıklar için, 1 T' lik bir manyetik alan ile 300 MV/m' lik elektrik alanın her biri aynı enine bükme kuvveti sağlar

7.3. Kuvvetli Odaklama

Bir parçacığın ideal yörüngeden sapması durumunda, gerekli geri çağırıcı kuvvet için gerekli magnetik alan şiddetinin büyük olması gerekebilir. Zayıf odaklamada bu etkiler alan gradyenleri ile sağlanabiliyordu. x ve y enine koordinatlar olmak üzere $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ koşulu için;

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (7.3)$$

İdeal yörüngede yaşanacak küçük x ve y sapmaları için birinci merteye alan gradyenlerini hatırlayalım:

$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} \quad (7.4)$$

$$\vec{B} = \left(B_x(0,0) + \frac{\partial B_x}{\partial y} y + \frac{\partial B_x}{\partial x} x \right) \hat{x} + \left(B_y(0,0) + \frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y \right) \hat{y} \quad (7.5)$$

Burada \hat{x} ve \hat{y} ; x ve y doğrultularındaki birim vektörlerdir. Her iki bileşen için parantez içindeki son terimler doğru açılardaki yer değiştirmeler için uygulanan kuvvetin bileşenleridir. \hat{x} ve \hat{y} ' ye ait geriye kalan bileşenler ise Eşitlik 7.1' den görüleceği üzere birbirine eşittir. Bu sebeple Lorentz Kuvveti bir koordinat ekseninde odaklama etkisi gösterirken, diğer koordinat ekseninde dağıtıcı etki gösterirler. Parçacıklar üzerinde bu odaklama etkisi aynı anda x ve y yönlerinde alan ve alan gradyeni bileşenleri üreten kuadropol magnetler ile sağlanabilir.

İnce lens kuadropolü için odak uzunluğu kolaylıkla elde edilebilir. Bir kuadropolde, mıknatısın simetri ekseninden x kadar sapsmış olarak geçmekte olan bir yüklü parçacık düşünelim. İnce lens yaklaşımında l magnetin uzunluğu, kuadropolden geçiş sırasında değişmeden kalan x mesafesine göre yeterince küçük seçilirse, parçacık hareketi boyunca parçacık üzerine etkiyen sabit manyetik alan;

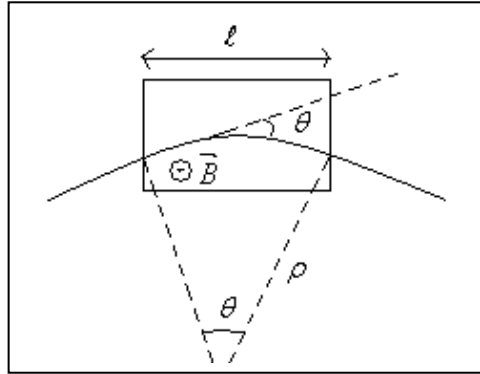
$$B_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} x \quad (7.6)$$

şeklinde olacaktır.

Paraksiyel yaklaşımda açı (eğim) $x' = dx/ds$ olarak tanımlanır. Burada, s boyuna (bağımsız) değişkendir. Şekil 7.2'de gösterildiği üzere parçacığın enine yörüngesinin eğimi aşağıdaki eşitlik ile değişmektedir.

$$\Delta x' = -\frac{\ell}{\rho} = -\ell \left(\frac{eB_y}{p} \right) = -\left(\frac{eB'\ell}{p} \right) x \quad (7.7)$$

Burada ρ manyetik alan etkisindeki parçacığın yörünge yarıçapı ve $B' = \partial B_y / \partial x$ kuadropol magnetin alan gradyenidir.



Şekil 7.2. Parçacık sapmasında ince lens yaklaşımı

Optik eksene paralel bir ışın Şekil 7.2'de gösterildiği üzere merceğin odak noktasına doğru büküldüğünden, f kuadropol lensinin odak noktası olmak üzere eğimdeki değişim; $\Delta x' = -x/f$, odak noktası uzunluğu ise;

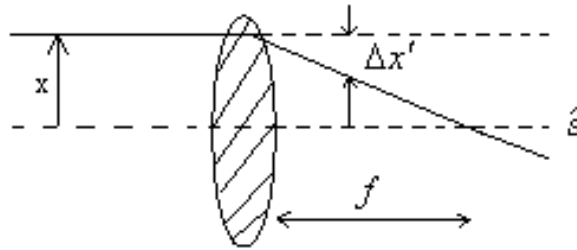
$$\frac{1}{f} = \frac{eB'\ell}{p} \quad (7.8)$$

olacaktır.

Yüklü parçacığın momentumunun yüküne oranı p/e ; manyetik katılık olarak adlandırılmakta ve $(B\rho)$ ile ifade edilmektedir. MKS sisteminde $B\rho$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$B\rho = \frac{p}{e} \quad (7.9)$$

$$B\rho[\text{Tesla.m}] = \frac{10}{2.99} p \left(\frac{\text{GeV}}{c} \right) \quad (7.10)$$



Şekil 7.3. Başlangıçta optik eksene paralel bir ışının, odak noktası f olan bir ince lensten geçişi sırasındaki bükülmesi

7.4. Enine Salınımlar İçin Hareket Denklemi

Enine salınımlar için hareket denklemlerini yazabilmek maksadıyla $B' = \partial B_y / \partial x$ gradyenine sahip bir manyetik alan etkisinde Δs yolu boyunca hareket eden bir parçacığı ele alırsak, parçacık yörüngesinin eğimi $x' = dx/ds$, yörünge eğimindeki değişim ise;

$$\Delta x' = - \left[\frac{B' \Delta s}{B\rho} \right] x = \frac{eB' \ell}{p} x \quad (7.11)$$

şeklindedir.

Buradan hareketle;

$$\frac{\Delta x'}{\Delta s} = -\frac{B'(s)}{B\rho} x \quad (7.12)$$

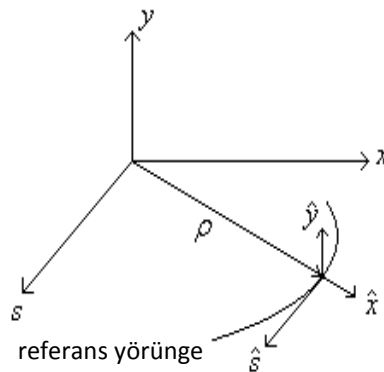
olarak elde edilir ve $\Delta s \rightarrow 0$ limit durumunda elde edilen ikinci dereceden diferansiyel denklem,

$$x'' + \frac{B'(s)}{B\rho} x = 0 \quad (7.13)$$

olarak ifade edilir.

Hareket denklemlerinin temellerini ortaya koyarken iki noktayı dikkate alarak ilerliyoruz. Öncelikle kendimizi ideal yörüngeyi düz bir çizgi olarak kabul edildiği ya da tek bir düzlemde kapalı bir eğri olduğu durumlara sınırlayalım.

Bir linak veya sinkrotronda oluşabilecek enine betatron salınımları için hareket denklemlerini yazıp çözebilmek amacıyla; ideal yörüngeyi (referans yörüngeyi) Şekil 7.4'te gösterildiği gibi eğri olduğunu kabul edelim. İlerleme doğrultusu s , enine yönler ise x ve y olarak alınır.



Şekil 7.4. Enine salınım analizi için koordinat sistemi

Parçacığın herhangi bir andaki konumu \vec{R} vektörü ile tanımlanacak olursa;

$$\vec{R} = r\hat{x} + y\hat{y} \quad (7.14)$$

olarak ifade edilir.

Burada $r = \rho + x$ şeklindedir. Sadece referans yörüngede gerçekleşen x ve y değişimleri ile ilgilenecek olursak, hareket denklemi Eşitlik 7.15'teki gibi olur.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v}x\vec{B} \quad (7.15)$$

Eğer \vec{B} manyetik alanın sadece dik ve açısal bileşenlerinin olduğunu kabul eder, \hat{s} doğrultusundaki bileşenini ise ihmal edersek. Eşitlik 7.15'in sağ tarafındaki vektörel çarpımın açılımı 7.16'daki gibi elde edilir.

$$\vec{v}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{s} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -v_s B_y \hat{x} + v_s B_x \hat{y} + (v_x B_y - v_y B_x) \hat{s} \quad (7.16)$$

Eğer hızlandırılan parçacığın yaptığı ışıma göz ardı edilirse; enerji ve dolayısıyla γ Lorentz faktörü statik bir manyetik alan etkisinde değişmez kalır. Magnetik kuvvetler iş yapmazlar ve hızın büyüklüğü sabit kalır.

Bu durumda Eşitlik 7.15'in sol tarafı;

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma m \dot{\vec{R}} = \gamma m \ddot{\vec{R}} \quad (7.18)$$

olur ve böylece;

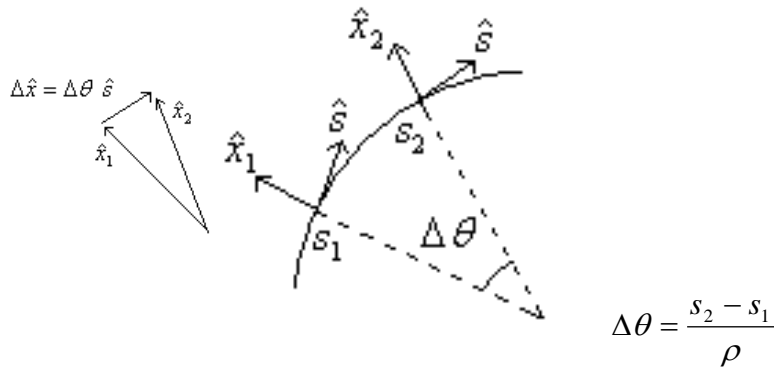
$$\ddot{\vec{R}} = \frac{e\vec{v}x\vec{B}}{\gamma m} \quad (7.19)$$

elde edilir.

$\vec{R} = r\hat{x} + y\hat{y}$ olduğu bilindiğinden. R vektörünün zamana göre değişimi;

$$\dot{\vec{R}} = \dot{r}\hat{x} + r\dot{\hat{x}} + \dot{y}\hat{y} \quad (7.19)$$

şeklinde tanımlanabilir.



Şekil 7.5. Birim \hat{x} vektörünün zamana bağlı değişimi

Eğer s doğrultusunda bir hareket söz konusu ise, birim vektör \hat{x} türetilir. Şekil 4.3'ten $\hat{x} = \dot{\theta} \cdot \hat{s}$ olduğunu görebiliriz. Ayrıca $\dot{\theta} = v_s / r$ olduğundan,

$$\dot{\vec{R}} = \dot{r}\hat{x} + r\dot{\theta}\hat{s} + \dot{y}\hat{y} \quad (7.20)$$

denkleminin bir kere daha türevini alırsak;

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{r}\hat{x} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{s} + r\dot{\theta}\dot{\hat{s}} + \ddot{y}\hat{y} \quad (7.21)$$

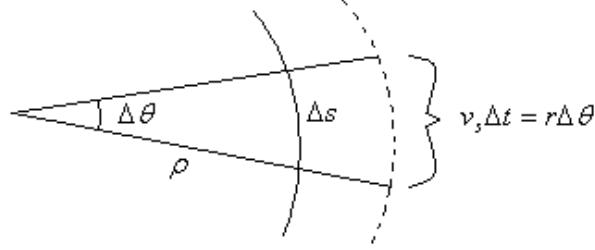
denklemini elde ederiz. Artık $\dot{\hat{s}}$ ya da bağımlılık söz konusudur. \hat{x} 'yi elde etmek için $\dot{\hat{s}} = -\dot{\theta} \hat{x}$ olarak seçersek;

$$\ddot{\vec{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{x} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{s} + \ddot{y}\hat{y} \quad (7.22)$$

denklemini elde ederiz. Böylelikle \hat{x} doğrultusundaki hareket denklemi aşağıdaki gibi olur;

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{ev_s B_y}{\gamma m} = \frac{ev_s^2 B_y}{\gamma m v_s} \quad (7.23)$$

olarak elde edilir.



Şekil 7.6. Referans yörünge uzunluğu ds ile parçacık yörüngesi uzunluğu $v_s dt$

$v_x \ll v_s$ ve $v_y \ll v_s$ olduğu için parçacığın toplam momentumu $P = \gamma m v_s$ şeklindedir.

Böylece;

$$p = \gamma m v_s$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{ev_s^2 B_y}{p}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \quad (7.24)$$

$$ds = \rho d\theta = v_s dt \frac{\rho}{r}$$

s , bağımsız değişken olarak değiştirildiğinde;

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 0 \text{ varsayarsak } \frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} = \left(v_s \frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2}$$

$$v \rightarrow \rho + x \Rightarrow \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho+x}{\rho^2} = -\frac{B_y}{B_\rho} \left(1 + \frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} \quad (7.25)$$

Eşitlik 7.21'deki hale gelir. Burada $(B\rho)=p/e'$ dir. Genelde bu denklemler doğrusal değildir. Düzlemsel bir hızlandırıcı düşündüğümüz için aynı şekilde;

$$B_x(0,0) = 0 \quad (7.26)$$

Bağlısımlı istenmediğinden de,

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (7.27)$$

olarak alınır. Sonuç olarak;

$$\frac{d^2}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y(s)}{\partial \lambda} \right] x = 0 \Rightarrow x + K(s)x = 0$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y(s)}{\partial x} y = 0 \quad (7.28)$$

$K(s)$, s' nin periyodik fonksiyonu ve aynı zamanda s' ye bağlı tasarım sabitidir.