

Poisson Dağılımı

Poisson Dağılımı sürekli ortamlarda (zaman, alan, hacim, ...) kesikli sonuçlar veren belli bir zaman aralığında bir yoldan geçen arabaların sayısının gözlenmesi, seyrek rastlanılan bir hastalık için belli bir zaman aralığında bu hastalığa yakalananların sayısının gözlenmesi, belli bir yılda meydana gelen doğala afetler gibi nadir rastlanan olayların modellenmesinde kullanılan bir dağılımdır. Dağılımın olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0,1,2, \dots$$

$$E(X) = \lambda \quad Var(X) = \lambda \quad M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu Matlab programında, ***poisspdf(x,λ)*** ile hesaplanır.

Örnek1: Bir santralda herhangi bir zamanda gelen telefonların sayısı saniyede 0.25 ortalamaya sahiptir.

- a) Herhangi bir 20 saniyede gelen telefonlara ilişkin olasılık fonksiyonunu yazın ve en çok 2 telefon gelme olasılığını hesaplayın?

20 saniyede ortalama $20 * 0.25 = 5$ telefon gelmesi beklenir. Olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = \frac{e^{-5} 5^x}{x!} \quad x = 0,1,2, \dots$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(x = 2)$$

$$= \frac{e^{-5} 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} 5^2}{2!} = 0.1247$$

Matlab Kodu

```
x=0:2;  
sum(poisspdf(x,5))  
ans =0.1247
```

- b) 90 saniyelik bir zaman diliminde telefon sayısına ilişkin beklenen değer ve standart sapma değeri nedir?

Saniyede ortalama 0.25 telefon geliyorsa 90 saniyede $90 * 0.25 = 22.5$ telefon gelir.

$$E(X) = 22.5$$

$$Var(X) = 22.5$$

$$\sigma = \sqrt{22.5} = 4.74$$

Örnek2: Belli bir ürünün kusurlu olması olasılığı 0.0001'dir. Üretilen 2000 adet ürün içindeki kusurlu olanların sayısının 5'den çok olması olasılığı nedir?

X rasgele değişkeni 20000 tane ürün içerisinde kusurlu olanların sayısı olsun. Bu durumda X rasgele değişkeni Binom dağılımına sahiptir.

$$X \sim b(20000, \frac{1}{10000})$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{x=0}^4 \binom{20000}{x} \left(\frac{1}{10000}\right)^x \left(\frac{9999}{10000}\right)^{20000-x} = 0.052644$$

Matlab Kodu

```
x=0:4;  
1-sum(binopdf(x,20000,0.0001))  
ans =0.052644
```

$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda$ olduğunda, $b(n, p)$ Binom dağılımındaki olasılıklar Poisson dağılımındaki olasılıklara yakınsar. O zaman, büyük n ve küçük p için Binom dağılımı ile ilgili olasılık hesaplamaları yaklaşık olarak Poisson dağılımında yapılabilir.

$$\lambda = np = 20000 * \frac{1}{10000} = 2$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{x=0}^4 \frac{e^{-2} 2^x}{x!} = 0.052653.$$

Matlab Kodu

```
x=0:4;  
1-sum(poisspdf(x,2))  
ans =0.052653
```

Ödev1: $\lambda = 1, 2.5, 5, 10, 20$ değerleri için Poisson dağılımının olasılık fonksiyonunun grafiklerini Matlab programında çizdiriniz ve yorumlayınız.