Üstel Dağılım ve Güvenirlilik Analizi

Bir X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \qquad , x > 0$$

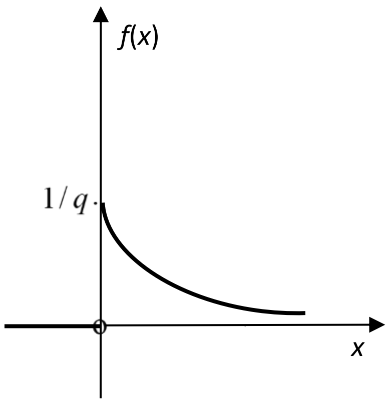
olduğunda X rasgele değişkeni üstel dağılıma sahiptir. θ: *iki durumun gözlenmesi için gereken ortalama süre ya da ölçülebilir uzaklık*

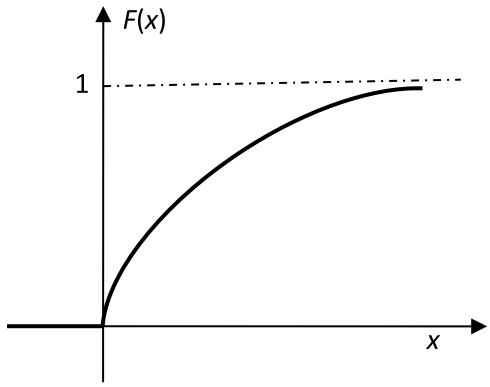
x: *iki durumun arasında veya ilk durumun ortaya çıkması için gereken süre ya da uzaklık*

Üstel dağılıma sahip bir X rasgele değişkeni için dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad , x \geq 0$$

şeklindedir.





$$M_x(t) = (1 - \theta t)^{-1} \quad , t < \frac{1}{\theta}$$

$$E(X) = \theta$$

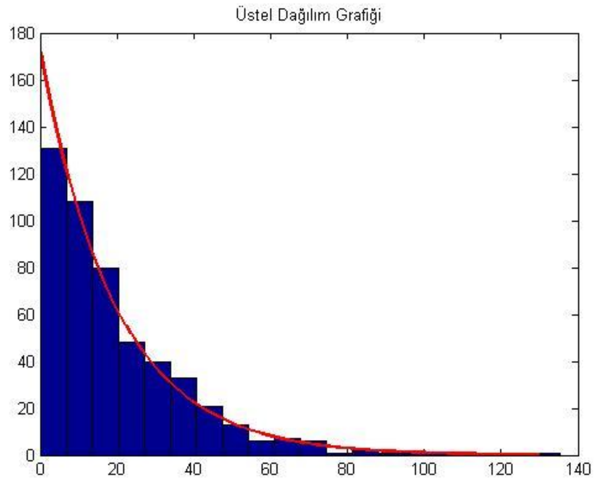
$$Var(X) = \theta^2$$

U : $U(0,1)$ olmak üzere $X = -\ln U$ rasgele değişkeni $q = 1$ olan üstel dağılıma sahiptir. Genel olarak, $\theta \in (0, \infty)$ için $X = -q \ln U$ dönüşümü ile elde edilen X rasgele değişkeni q parametreli üstel dağılıma sahiptir.

Örnek1:

Matlab Kodu

```
veri=-20*log(rand(500,1));
h=histfit(veri,20,'exp');
title('Üstel Dağılım Grafiği');
```



Örnek2: Self servis hizmet veren büyük bir lokantada her 5 dakikada ortalama 4 müşterinin kuyruğa girdiği bilinmektedir.

a) 1 dakika içerisinde hiç müşteri gelmeme olasılığını
b) Birbirini izleyen iki müşteri arasında en fazla 2 dakika geçme olasılığını
c) İki müşteri arasında geçen sürenin 3 dakikadan fazla olma olasılıklarını bulunuz.

Verilen bir başlangıç anından itibaren geçen t süresi içinde ilgilenilen olayın gerçekleşme sayısı X rasgele değişkeni, ortalaması λt olan Poisson Dağılımına sahip iken gelişler arası süre olarak tanımlanan T rasgele değişkeninin dağılımı bir üstel dağılımdır.

a) 1 dakikada ortalama 4/5 müşteri geldiğine göre hiç müşteri gelmeme olasılığı,

$$P(X=0)=\frac{e^{-4/5}(4/5)^0}{0!}=0.449$$

b) Gelişler arası geçen sürenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t)=\frac{4}{5}e^{-4/5t}$ olur.

$$P(T\leq 2)=\int_0^2 \frac{4}{5}e^{-4/5t}dt=0.7981$$

c) $P(T>3)=1-P(T\leq 3)=1-F(3)=1-\left(1-e^{-\frac{4}{3}*3}\right)=0.09072$

Örnek3: Belli bir elektronik parça için yıl olarak dayanma süresi $\theta=5$ olan üstel dağılıma sahip olduğu bilinsin. X böyle bir parça için dayanma süresi olmak üzere, X in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5}, & x\geq 0\\ 0 & \text{, d.y}\end{cases}$$

olarak verilmiş olsun. Böyle bir elektronik parçanın en az 10 yıl dayandığı bilindiğinde bundan sonra en az 5 yıl daha dayanması olasılığı nedir?

10 yıl dayandığı bilindiğinde en az 5 yıl daha dayanması olasılığı,

$$P(X \geq 15 / X \geq 10) = \frac{P(X \geq 15 \; ve \; X \geq 10)}{P(X \geq 10)} = \frac{P(X \geq 15)}{P(X \geq 10)} = \frac{\int_{15}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-x/5} dx}{\int_{10}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-x/5} dx} = \frac{-e^{-x/5}\Big|_{15}^{\infty}}{-e^{-x/5}\Big|_{10}^{\infty}} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1}$$

dır. Parçanın 10 yıl dayandığı bilindiğinde bundan sonra en az 5 yıl daha dayanması olasılığı, yeni göreve başlamış bir parçanın en az 5 yıl dayanması olasılığına eşittir. Genel olarak üstel dağılımlarda,

$$P\big((X \geq a + x)/(X \geq a)\big) = P(X \geq x)$$

dır. a yıl dayanmış bir parçanın bundan sonra en az x yıl daha dayanması olasılığı, yeni göreve başlamış bir parçanın en az x yıl dayanması olasılığı kadardır. Bu üstel dağılımın hafızasızlık özelliğidir. Birçok elektronik parça bu özelliğe sahiptir. Bunların bozulmalarının sebebi yıpranma değil başka etkenlerdir.

Bu durumda, hafızasızlık özelliğini kullanarak bu sorunun çözümü aşağıda verilmiştir.

$$P(X \geq 5) = \int_{5}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = -e^{-x/5}\Big|_{5}^{\infty} = e^{-1} \approx 0,37$$

Güvenirlilik Analizi

Dayanma (yaşam) süresi ya da bir parçanın veya bir sistemin bozuluncaya (ölünceye) kadar geçen zaman T ile gösterilsin.

$$R(t) = P(T > t), \quad t \geq 0$$

fonksiyonuna güvenirlilik fonksiyonu (reliability function) denir. Bir sistemin belli bir t anındaki güvenirliliği ($R(t)$) bu sistemin t anında görev yapabiliyor olmasının olasılığıdır. Başka bir ifade ile t anına kadar bozulmamış olmasının olasılığıdır ya da bozulmanın t anından sonra olması olasılığıdır.

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t / T > t}{\Delta t} \quad , t \geq 0$$

fonksiyonuna bozulma oranı (ölüm oranı, risk, hazard) denir.

$$h(t)\Delta t \approx P(t < T \leq t + \frac{\Delta t}{T} > t)$$

olmak üzere $h(t)\Delta t$ değeri, sistemin t anına kadar bozulmadığı bilindiğinde $(t, t + \Delta t]$ zaman aralığında bozulma olasılığı olarak düşünülürse,

$$h(t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t / T > t}{\Delta t}$$

olup, birim zamanda bozulma olasılığıdır.

Dayanma süresi T üstel dağılıma sahip olduğunda,

$$f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad ,t > 0$$

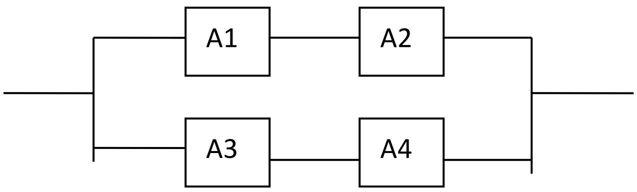
$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad ,t \geq 0$$

$$R(t) = e^{-t/\theta} \quad ,t > 0$$

$$h(t) = \frac{1}{\theta} \qquad ,t \geq 0$$

Sistem Güvenirliliği

Bir sistem, dayanma sürelerinin bağımsız olduğu ve olasılık dağılımları bilinen bileşenlerden (parçalardan) oluşsun.



Sistem paralel görev yapan iki alt sistemden oluşmaktadır. Alt sistemlerden her biri seri görev yapan iki parçadan oluşmaktadır. A_i olayı i numaralı $(i = 1,2,3,4)$ parçanın t zaman biriminden (yıldan) fazla dayanma olayı olsun. Sistemin en az t yıl dayanma olayının olasılığı,

$$\begin{aligned} P[(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)] &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \end{aligned}$$

dır. Parçalar için dayanma süresi $T_i(i = 1,2,3,4)$ rasgele değişkeni ve güvenirlilik fonksiyonu $R_i(t) = P(T_i > t)$ ile gösterilirse, sistemin güvenirlilik fonksiyonu,

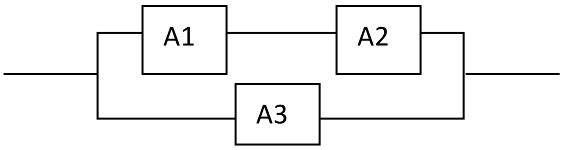
$$R_{S1}(t) = R_1(t)R_2(t) + R_3(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t)$$

olur. Parçalar aynı türden olduğu için,

$$R_{S1}(t) = R_1^2(t)\big(2 - R_1^2(t)\big), \qquad t > 0$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek4:



Sistem paralel görev yapan iki alt sistemden oluşmaktadır. Alt sistemlerden biri seri görev yapan iki parçadan diğeri ise tek parçadan oluşmaktadır. A_i olayı i numaralı (i=1,2,3) parçanın t zaman biriminden (yıldan) fazla dayanma olayı olsun.

a) Sistemin en az t yıl dayanması olayının olasılığını yazınız.

b) Parçalar için dayanma süresi T_i (i=1,2,3) rasgele değişkeni ve güvenirlilik fonksiyonu $R_i(t) = P(T_i > t)$ ile gösterilirse, sistemin güvenirlilik fonksiyonunu yazınız.

c) Parçalar için dayanma süresi β=5 yıl ortalama ile üstel dağılıma sahip olsun. Sistemin en az 5 yıl görev yapma olasılığını bulunuz.

d) Sisteme ilişkin Matlab kodunu yazınız ve işletiniz.

Çözüm:

a) $P[(A_1 \cap A_2) \cup A_3] = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

b) $R_{S1}(t) = R_1(t)R_2(t) + R_3(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)$

Parçalar aynı türden olduğu için,

$$R_{S1}(t) = R_1^2(t) + R_1(t) - R_1^3(t), \qquad t > 0$$

c) Dayanma süresi T üstel dağılıma sahip olduğu için, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\beta}{\theta}} \qquad ,t > 0$$

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\beta}} \qquad ,t \geq 0$$

$$R_i(t) = P(T_i > t) = 1 - F(t)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{\beta}}\right) = e^{-\frac{t}{\beta}} = e^{-\frac{5}{5}} = e^{-1}$$

$$R_{S1}(t) = R_1^2(t) + R_1(t) - R_1^3(t)$$

$$= (e^{-1})^2 + e^{-1} - (e^{-1})^3 = 0.4534$$

d)

Matlab kodu:

```
n=1000
for i=1:n
T1=-5*log(rand(1));
T2=-5*log(rand(1));
T3=-5*log(rand(1));
TS1(i)=max(min(T1,T2),min(T3));
end
RS1=sum(TS1>5)/n   %ortalama dayanma süresi
ETS1=mean(TS1)      %beklenen değer
hist(TS1)
```