Normal Dağılım

Bir X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

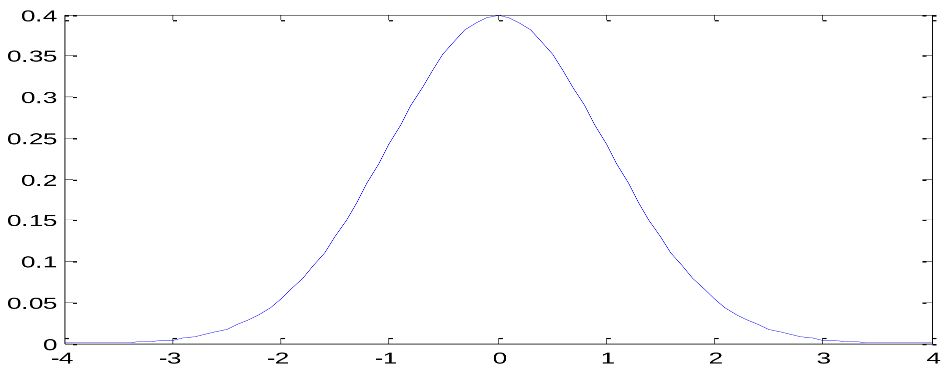
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^z > 0$$

biçiminde olduğunda X rasgele değişkenine normal dağılıma sahiptir denir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir. $\mu = 0\ ve\ \sigma^2 = 1$ olan dağılıma standart normal dağılım denir. Standart normal dağılıma sahip $Z \sim N(0,1)$ rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

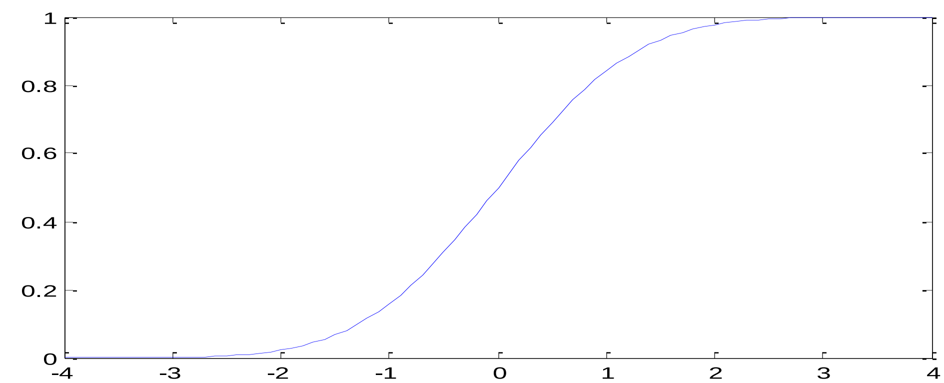
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < z < \infty$$

ve grafikleri,

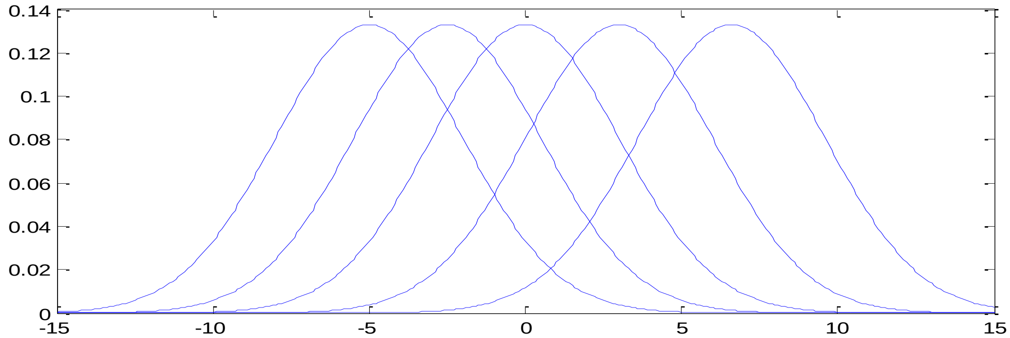
```
>> x=-4:.1:4;

>> plot(x,normpdf(x,0,1))
```



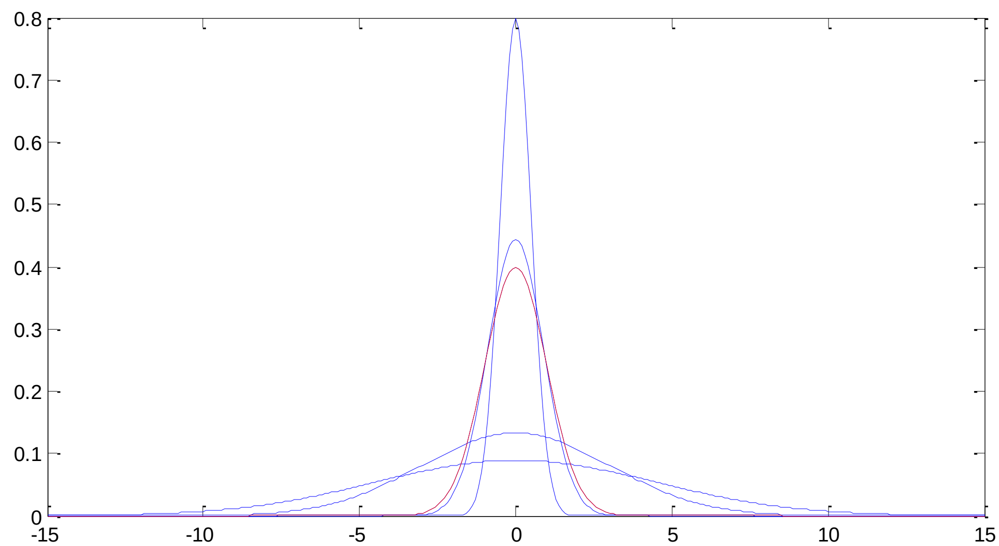

```
>> plot(x,normcdf(x,0,1))
```



Görüldüğü üzere olasılık yoğunluk grafiği çan şekline benzediği için çan eğrisi olarakta isimlendirilir. Aynı varyanslı $(\sigma^2 = 9)$ ve farklı ortalama değerlerine sahip $(\mu = -5, -2.5, 0, 3, 6.6)$ normal dağılımlı rasgele değişkene ilişkin olasılık yoğunluk grafiği şağıda verilmiştir.



Aynı kitle ortalaması $(\mu = 0)$ ve farklı varyans değerlerine sahip $(\sigma^2 = 0.25, 0.81, 1, 9, 20)$ normal dağılımlı rasgele değişkene ilişkin olasılık yoğunluk grafiği şağıda verilmiştir. Varyans değeri arttıkça olasılık yoğunluk fonksiyonu basıklaşmaktadır, küçüldükçe sivrileşmektedir.



Normal Dağılımın Özellikleri

1. Normal dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonun altında kalan alan 1'dir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

2. Normal dağılım ortalamaya göre simetriktir.

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)dx = \int_{\mu}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

3. Normal dağılıma sahip bir rasgele değişkenin aritmetik ortalaması, ortancası ve tepe değeri birbirine eşittir.

4. Deneklerin,
   %68.26'sı $\mu \pm 1\sigma$
   %95.46'sı $\mu \pm 2\sigma$
   %99.74'ü $\mu \pm 3\sigma$
   Sınırları içinde yer alır. Bu normal dağılım için Ampirik kuraldır.

Örnek1: Z rasgele değişkeni normal dağıldığına göre yani $Z \sim N(0,1)$ ise aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız. Standart normal dağılım tablosu kullanılarak olasılıklar bulunur.

a) $\mathrm{P}(0 \leq \mathrm{Z} \leq 1.43) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1.43) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0)$

$$= 0.9236 - 0.5000 = 0.4236$$

Matlab Kodu

>> normcdf(1.43,0,1)-normcdf(0,0,1)

b) $\mathrm{P}(-0.78 \leq \mathrm{Z} \leq 0) = \mathrm{P}(0 \leq \mathrm{Z} \leq 0.78)$
$= \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0.78) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0)$

$$= 0.7823 - 0.5000 = 0.2823$$

Matlab Kodu

>> normcdf(0.78,0,1)-normcdf(0,0,1)

c) $\mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq 0.94) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0.94$
$= 1 - 0.8264 = 0.1736$

Matlab Kodu

>> 1-normcdf(0.94,0,1)

d) $P(|Z| \leq 0.6) = P(-0.6 \leq Z \leq 0.6)$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 0.6)$$
$$= 2[0.7257 - 0.5000] = 0.4514$$

Matlab Kodu

>> 2[normcdf(0.6,0,1)-normcdf(0,0,1)]*

Örnek2: Rasgele seçilen 560 öğrencinin boy uzunlukları 166 cm ortalamalı ve 30 cm standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Rasgele bir öğrenci seçilirse bu öğrencinin boyunun

a) 170 cm ile 182 cm arasında olma olasılığı nedir?
b) 175 cm'den uzun olma olasılığı nedir?
c) Boyu 172 cm'den büyük olan öğrencilerin sayısı nedir?

Çözüm: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere, standartlaştırma işlemi yapılarak $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ rasgele değişkeni standart normal dağılıma sahip bir rasgele değişken olur.

Soruda $X \sim N(166{,}900)$ olmak üzere,

a) $P(170 \leq X \leq 182) = P\left(\frac{x1-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x2-\mu}{\sigma}\right)$

$$= P\left(\frac{170-166}{30} \leq Z \leq \frac{182-166}{30}\right)$$
$$= P(0.13 \leq Z \leq 0.53)$$
$$= P(Z \leq 0.53) - P(Z \leq 0.13)$$
$$= 0.7019 - 0.5517 = 0.1502$$

Matlab Kodu

>> normcdf(182,166,30)-normcdf(170,166,30)

b) $P(X \geq 175) = 1 - P(X \leq 175)$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{175-166}{30}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.3) = 1 - 0.6179 = 0.3821$$

Matlab Kodu

>> 1-normcdf(175,166,30)

c) $P(X \geq 172) = 1 - P(X \leq 172)$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{172 - 166}{30}\right)$$

$$= \mathbf{1} - P(Z \leq 0.2)$$

$$= 1 - 0.5793 = 0.4207$$

Matlab Kodu

>> 1-normcdf(172,166,30)

Öğrenci sayısı ise, $500 * 0.4207 = 210.35 \cong 210$ kişi olarak bulunur.

Ödev: Matlab'da $randn(100,1)$ fonksiyonu ile $N(0,1)$ dağılımından 100 adet sayı üretip histogramını çiziniz.

Ödev: $N(60,100)$ dağılımının olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonunlarının grafiklerini çizdiriniz ve bu dağılımdan 100 adet rasgele sayı üretip histogramını çiziniz.