# <u>İki Rasgele Değişkenin Kovaryansı ve Korelasyonu</u>

## 1. Kovaryans

İki değişkenin birlikte değişimlerinin ölçüsü kovayans olarak bilinir ve *Cov(X,Y)* ya da *Kov(X,Y)* ile gösterilir.

$$Kov(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right) - \left(Y - E(Y)\right)\right] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Eğer $X$ $ve$ $Y$ rasgele değişkenleri bağımsız ise $E(XY) = E(X)E(Y)$ olacağı için $Kov(X,Y) = 0$ olur.

Ancak, $Kov(X,Y) = 0$ olması demek, *X ve Y* rasgele değişkenlerinin bağımsız olduğu anlamına gelmez. Bu durumda iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin sıfır olduğu yargısına varılır.

## 2. Korelasyon

Korelasyon katsayısı iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin derecesini belirleyen ve karşılaştırmaya olanak veren bir katsayıdır.

$$\rho_{XY} = \frac{Kov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad\qquad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

$\rho_{XY} = 0$ olması *X ve Y* rasgele değişkenleri arasında doğrusal bir ilişki olmadığını,
$\rho_{XY} < 0$ olması *X ve Y* rasgele değişkenleri arasında ters yönlü doğrusal bir ilişki olduğunu,
$\rho_{XY} > 0$ olması *X ve Y* rasgele değişkenleri arasında aynı yönlü doğrusal bir ilişki olduğunu gösterir.

**Örnek1:**

| $P(X=x, Y=y)$ | $x$=1 | $x$=2 | $P(Y=y)$ |
|---|---|---|---|
| $y$=1 | 3/22 | 4/22 | 7/22 |
| $y$=3 | 7/22 | 8/22 | 15/22 |
| $P(X=x)$ | 10/22 | 12/22 | 1,00 |

$$E(XY) = 1(1)\frac{3}{22} + 1(3)\frac{7}{22} + 2(3)\frac{8}{22} = \frac{40}{11}$$
$$E(X) = 1\left(\frac{10}{22}\right) + 2\left(\frac{12}{22}\right) = \frac{17}{22}$$
$$E(X^2) = 1^2\left(\frac{10}{22}\right) + 2^2\left(\frac{12}{22}\right) = \frac{29}{22}$$
$$\sigma_x^2 = \frac{29}{11} - \left(\frac{17}{22}\right)^2 = \frac{30}{121}$$
$$E(Y) = 1\left(\frac{7}{22}\right) + 3\left(\frac{15}{22}\right) = \frac{26}{11}$$
$$E(Y^2) = 1^2\left(\frac{7}{22}\right) + 3^2\left(\frac{15}{22}\right) = \frac{71}{11}$$
$$\sigma_y^2 = \frac{71}{11} - \left(\frac{26}{11}\right)^2 = \frac{105}{121}$$
$$Kov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{40}{11} - \left(\frac{17}{11}\right)\left(\frac{26}{11}\right) = -\frac{2}{121}$$
$$\rho_{XY} = \frac{Kov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{-2/121}{\sqrt{(30/121)(105/121)}} = -0.036$$

**Örnek2:** *X ve Y* değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_{X,Y}(x,y) = x + y\,,\ \ 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$ verilmiş olsun. $Kov(X,Y)$ ve $\rho_{XY}$ değerlerini hesaplayınız.

$$E(X) = \int_0^1\int_0^1 x(x+y)dxdy = \frac{7}{12}$$
$$E(X^2) = \int_0^1\int_0^1 x^2(x+y)dxdy = \frac{5}{12}$$
$$\sigma_x^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^1 y(x+y)dxdy = \frac{7}{12}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 \int_0^1 x^2(x+y)dxdy = \frac{5}{12}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \frac{1}{3}$$

$$Kov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right) = -\frac{1}{144}$$

$$\rho_{XY} = \frac{Kov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1/144}{\sqrt{(11/144)(11/144)}} = -0.091$$