

Lineer Fark Denklem Sistemleri

Ankara Üniversitesi

$x(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon ve

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0$$

k yıncı basamaktan bir skaler fark denklemdir.

$x(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$ olmak üzere, $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))$ k boyutlu vektör değerli olsun.

$$x(n+1) = A(n)x(n) \quad (1)$$

sistemini ele alalım.

Burada,

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix}, \quad A(n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

dir.

(1) sistemi 1. basamaktan k boyutlu bir lineer sistemdir. (1) sistemi açık olarak

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}(n)x_1(n) + a_{12}(n)x_2(n) + \dots + a_{1k}(n)x_k(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}(n)x_1(n) + a_{22}(n)x_2(n) + \dots + a_{2k}(n)x_k(n) \\ \vdots \\ x_k(n+1) = a_{k1}(n)x_1(n) + a_{k2}(n)x_2(n) + \dots + a_{kk}(n)x_k(n) \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. Burada bütün $a_{ij}(n)$ elemanları, kısaca $A(n)$ matrisi, $n \geq n_0$ için tanımlı fonksiyonlardır. Ayrıca $A(n)$ matrisi $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ üzerinde singüler olmayandır. Yani $\forall n \geq n_0$ için $\det A(n) \neq 0$ dır.

Örnek

$$\begin{cases} x_1(n+1) = -5nx_1(n) + n^3x_3(n) \\ x_2(n+1) = e^n x_1(n) - x_2(n) + 5nx_3(n) \\ x_3(n) = x_2(n) - (\cos n)x_3(n) \end{cases}$$

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$x(n+1) = \begin{pmatrix} -5n & 0 & n^3 \\ e^n & -1 & 5n \\ 0 & 1 & -\cos n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix} \text{ homogen sistemi}$$

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n) \quad (2)$$

homogen olmayan sistemini ele alalım.

1. basanaktan lineer k boyutlu homogen olmayan sisteme bir örnek verelim.

Örnek

$$\begin{cases} x_1(n+1) = -(n^3 + 2n + 1)x_1(n) - x_2(n) + 3 \\ x_2(n+1) = e^{n^3}x_2(n) + n^5 - 4n + 1 \end{cases}$$

Bu sistemi,

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(n^3 + 2n + 1) & -1 \\ 0 & e^{n^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ n^5 - 4n + 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem

$A(n)$, $n \geq n_0$ üzerinde tanımlı ve singüler olmayan bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = A(n)x(n) \quad (1)$$

sistemini ve

$$x(n_0) = x_0 \quad (2)$$

başlangıç koşulu verilsin. (1) – (2) başlangıç değer probleminin $[n_0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir tek çözümü vardır.

$\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)$ kolon vektörleri (1) sisteminin k tane çözümü olsun. Bu durumda,

$$\Phi(n) = (\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n))$$

matrisi için

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n), \quad n \geq n_0$$

dır.

Yani, $\Phi(n)$, $X(n+1) = A(n)X(n)$ matris denkleminin bir çözümüdür. Burada $X(n)$, $k \times k$ tipinde bir matrisdir.