Putzer Algoritması

Ankara Üniversitesi

A, $k \times k$ tipinde reel bir sabit matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ bu matrisin özdeğerleri olsun.
Bu durumda

$$A^n = \sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1)$$

dir. Burada I birim matris olmak üzere

$$M(j) = (A - \lambda_j I) M(j-1), \ M(0) = I$$

dır. $u_j(n)$, $j = 1, 2, ..., k$ skaler fonksiyonları

$$\begin{aligned} u_1(n+1) &= \lambda_1 u_1(n), \ u_1(0) = 1 \\ u_j(n+1) &= \lambda_j u_j(n) + u_{j-1}(n), \ u_j(0) = 0, \ j = 2, 3, ..., k \end{aligned}$$

probleminin bileşenleri olup

$$u_1(n) = \lambda_1^n$$

$$u_j(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_j^{n-1-r} u_{j-1}(r), \; j = 2, 3, ..., k$$

şeklindedir.

Örnek

Örnek 1

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ olmak üzere A^n matrisini Putzer algoritması yardımıyla bulalım.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

den $(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$ karakteristik denklemi elde edilir. Böylece A nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ olarak bulunur.

Örnek

Örnek 1 devamı

$M(0) = I,$

$$M(1) = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M(2) = (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek

Örnek 1 devamı

$u_1(n) = 4^n$,

$u_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} 2^i = n2^{n-1}$,

$u_3(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-i-1}(i2^{i-1}) = -2^n + 3^n - n2^{n-1}$ olarak hesaplanır.

Böylece

$$
\begin{aligned}
A^n &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1) \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} - 3^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n + 3^n \\ 2^n - 3^n - n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2.3^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur.