Lineer Periyodik Sistemler

Ankara Üniversitesi

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{1}$$

sistemini ele alalım. Burada $A(n)$, $N-$periyotlu periyodik bir matristir. Yani, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve bir pozitif N tamsayısı için

$$A(n+N) = A(n)$$

dir.

Lemma

B, $k \times k$ tipinde singüler olmayan bir matris ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda $C^m = B$ olacak şekilde $k \times k$ tipinde singüler olmayan bir C matrisi vardır.

Lemma

$\Phi(n)$, (1) *sisteminin bir temel matrisi olmak üzere, aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:*
(i) $\Phi(n+N)$ *de (1) sisteminin bir temel matrisidir.*
(ii) $\Phi(n+N) = \Phi(n)C$, C *singüler olmayan matris*
(iii) $\Phi(n+N, N) = \Phi(n, 0)$.

Teorem

(Floquet teoremi)
(1) *sisteminin her* $\Phi(n)$ *temel matrisi için*

$$\Phi(n) = P(n)B^n$$

olacak şekilde singüler olmayan $N-$*periyotlu periyodik bir* $P(n)$ *matrisi ve singüler olmayan sabit bir* B *matrisi vardır.*

Tanım

(Floquet üsleri)

$C = B^N$ matrisine (1) sistemi için bir monodromi matrisi denir. B nin λ özdeğerlerine (1) sisteminin Floquet üsleri ve B^N matrisinin λ^N özdeğerlerine (1) sisteminin Floquet çarpanları denir.

Teorem

(1) sistemi için bir Floquet çarpanı μ olsun. Bu durumda (1) sisteminin

$$x(n+N) = \mu x(n)$$

olacak biçimde aşikar olmayan bir $x(n)$ çözümü vardır.

Sonuç

(i) (1) sisteminin $N-$periyotlu periyodik bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul bir Floquet çarpanının 1 olmasıdır.
(ii) (1) sisteminin $2N-$periyotlu periyodik bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul bir Floquet çarpanının -1 olmasıdır.