Lineer Sistemler için Kararlılık Kriterleri

Ankara Üniversitesi

Birinci basamaktan k boyutlu değişken katsayılı lineer

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \geqslant n_0 \geqslant 0, \tag{1}$$

sistemini ele alalım. Burada $A(n)$, $k \times k$ tipinde her $n \geqslant n_0$ için singüler olmayan reel değerli bir matristir. Ayrıca, özel olarak sabit katsayılı

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{2}$$

lineer sistemini yazabiliriz.

Teorem

$\Phi(n)$, (1) in bir temel matrisi olsun. Bu durumda (1) in sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\|\Phi(n)\| \leq M,\ n \geqslant n_0 \geqslant 0,$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısının var olmasıdır.

Teorem

$\Phi(n)$, *(1) in bir temel matrisi olsun. Bu durumda (1) in sıfır çözümünün düzgün kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$\|\Phi(n,m)\| \leq M, \ \ n_0 \leq m \leq n < \infty,$$

olacak biçimde bir M sabitinin bulunmasıdır.

Teorem

$\Phi(n)$, (1) in bir temel matrisi olsun. Bu durumda (1) in sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \to \infty} \|\Phi(n)\| = 0$$

dır.

Teorem

$\Phi(n)$, (1) in bir temel matrisi olsun. Bu durumda (1) in sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\|\Phi(n,m)\| \leq M\delta^{n-m},\ n_0 \leq m \leq n < \infty,$$

olacak biçimde pozitif M ve $\delta \in (0,1)$ sayılarının var olmasıdır.

Sonuç

(1) lineer sisteminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul tüm çözümlerin sınırlı olmasıdır;

Sonuç

(1) lineer sisteminin sıfır çözümünün üstel kararlı olması için gerek ve yeter koşul sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olmasıdır.

Teorem

A, 2×2 tipinde bir matris olmak üzere (2) nin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$|trA| < 1 + \det A < 2$$

dir; burada trA, A nın izidir.