Lyapunov Doğrudan Yöntemi

Ankara Üniversitesi

$f : G \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ sürekli vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere k-boyutlu lineer olmayan

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{1}$$

otonom fark denklem sistemi ele alalım.
x^*, (1) in bir denge noktası; yani, $f(x^*) = x^*$ olsun.

$V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. V nin (1) sistemine göre değişimi
(varyasyonu)

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$$

veya

$$\begin{aligned} \Delta V(x(n)) &= V(f(x(n))) - V(x(n)) \\ &= V(x(n+1)) - V(x(n)) \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır.
Buna göre $\Delta V(x) \leq 0$ ise, V fonksiyonu (1) in çözümleri boyunca artmayandır.

Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $V : G \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna H bölgesinde bir **Lyapunov fonksiyonu** denir:

(i) V, G üzerinde süreklidir,

(ii) x ve $f(x) \in G$ için $\Delta V(x) \leq 0$ dır.

Şimdi aşağıdaki tanımı verebilmek için $\mathbb{R}^k$ da x merkezli γ-yarıçaplı

$$B(x,\gamma) = \left\{ y \in \mathbb{R}^k : \|y - x\| < \gamma \right\}$$

açık yuvarını tanımlayalım.

Tanım

Bir reel değerli V fonksiyonuna, aşağıdaki koşulların sağlanması halinde, x^* noktasında **pozitif definit** denir:
(i) $V(x^*) = 0$,
(ii) $\forall\ x \in B(x^*, \gamma)$, $x \neq x^*$, için $V(x) > 0$.

Lyapunov Kararlılık Teoremleri

Teorem

x^* denge noktasının bir G komşuluğunda (1) denklemi için bir V Lyapunov fonksiyonu varsa ve bu fonksiyon x^* noktasında pozitif definit ise, o zaman x^* denge noktası kararlıdır.

Teorem

x^* denge noktasının bir G komşuluğunda (1) denklemi için bir V Lyapunov fonksiyonu var ve bu fonksiyon x^* noktasında pozitif definit olsun. $x \neq x^*$ olmak üzere
$x, f(x) \in G$ için $\Delta V(x) < 0$ ise, o zaman x^* denge noktası asimptotik kararlıdır.

Teorem

V, bir $\alpha > 0$ sayısı için $\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| > \alpha\}$ üzerinde bir Lyapunov fonksiyonu olsun.

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$$

koşulu sağlanıyorsa, o zaman (1) sisteminin bütün çözümleri sınırlıdır.

Teorem

ΔV orijinin bir komşuluğunda pozitif definit ve $V(a_i) > 0$ olacak şekilde bir $(a_i) \to 0$ dizisi var ise, bu durumda (1) sisteminin sıfır çözümü kararsızdır.