# Lineer Otonom Sistemler

Ankara Üniversitesi

$k$-boyutlu lineer

$$x(n+1) = Ax(n), \;\; n \geqslant n_0 \geqslant 0 \tag{1}$$

otonom fark sistemini ele alalım. Burada $A$, $k \times k$ tipinde reel sabit elemanlı singüler olmayan bir matristir.

## Tanım

$B = (b_{ij})$, $k \times k$ tipinde reel simetrik bir matris olsun. Skaler

$$V(x) = x^T Bx = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j$$

fonksiyonu pozitif definit ise, $B$ ye **pozitif definit matris** denir.

## Tanım

Bir matrisin *esas asli minörleri*, o matrisin kendisi ile ardışık olarak son satır ve son kolonların atılmasıyla elde edilen karesel matrislerdir.

Bu tanıma göre

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin esas asli minörleri

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ ve } (4)$$

dür.

**Teorem**

**(Sylvester kriteri)**

*Reel simetrik bir $B$ matrisinin pozitif definit olması için gerek ve yeter koşul onun bütün esas asli minörlerinin determinantlarının pozitif olmasıdır.*

## Örnek

$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ile verilen reel simetrik $B$ matrisi pozitif definittir.
Çünkü onun bütün esas asli minörlerinin determinantları pozitiftir.
Gerçekten,

$$\det(B) = 14, \ \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 18 \text{ ve } \det(4) = 4$$

dür. Ayrıca, bu matrise karşılık gelen kuadratik

$$V(x) = x^T Bx = 4x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 - 2x_2x_3$$

fonksiyonu pozitif definit olur; burada $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ dir. Çünkü $V(0) = 0$ ve her $x \neq 0$ için $V(x) > 0$ dır.

## Teorem

*Reel simetrik bir $B$ matrisi pozitif definit ise, bu durumda $B$ nin bütün özdeğerleri pozitiftir. Ayrıca, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, $B$ nin özdeğerleri ise, o zaman*

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant \lambda_{\max} \|x\|^2, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^k,$$

*dir; burada $\|.\|$ Öklid normu, $V(x) = x^T Bx$,*

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \min\{|\lambda_i| : 1 \leqslant i \leqslant k\} \quad \textit{ve} \\ \lambda_{\max} &= \rho(A) = \max\{|\lambda_i| : 1 \leqslant i \leqslant k\} \end{aligned}$$

*dır.*

$B$ pozitif definit simetrik bir matris olduğu sürece bir aday Lyapunov fonksiyonu olarak

$$V(x) = x^T B x$$

seçilebilir. Sonra bu fonksiyonun (1) sistemine göre $\Delta V(x)$ değişimi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \Delta V(x(n)) &= x^T(n+1)Bx(n+1) - x^T(n)Bx(n) \\ &= x^T(n)A^T BAx(n) - x^T(n)Bx(n) \\ &= x^T(n)(A^T BA - B)x(n). \end{aligned}$$

Buna göre $\Delta V(x) < 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$A^T BA - B = -C \tag{2}$$

olmasıdır; burada $C$ bir pozitif definit simetrik matristir. (2) denklemi (1) sistemi için **Lyapunov denklemi** olarak bilinir.

## Teorem

*(1) sisteminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul her pozitif definit simetrik $C$ matrisine karşılık (2) denkleminin bir tek pozitif definit simetrik $B$ matrisine sahip olmasıdır.*