Lagrange özdeşliği, Green formülü, Liouville formülü ve Cauchy fonksiyonu

Ankara Üniversitesi

$$\Delta(p(n-1)\Delta x(n-1)) + q(n)x(n) = 0, \;\; n \in [a+1, b+1], \qquad (1)$$

fark denklemini ele alalım; burada $p(n)$ fonksiyonu $[a, b+1] = \{a, a+1, ..., b+1\}$ üzerinde tanımlı ve pozitif değerli, $q(n)$ fonksiyonu $[a+1, b+1]$ üzerinde tanımlı olup $a, b \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ dir. Bu denklem açık olarak

$$p(n)x(n+1) + c(n)x(n) + p(n-1)x(n-1) = 0, \;\; n \in [a+1, b+1], \quad (2)$$

biçimindedir; burada

$$c(n) = q(n) - p(n) - p(n-1) \qquad (3)$$

dir. Tersine olarak, $p(n)$ fonksiyonu $[a, b+1]$ üzerinde pozitif olduğu sürece (2) şeklinde verilen bir denklem,

$$q(n) = c(n) + p(n) + p(n-1) \qquad (4)$$

olmak üzere (1) formunda yazılabilir.

Örnek

$3^n x(n+1) + (\cos n - 4.3^{n-1})x(n) + 3^{n-1}x(n-1) = 0$ fark denklemi (2) formunda verilmiştir. Burada $p(n) = 3^n$ ve $c(n) = \cos n - 4.3^{n-1}$ dir. $p(n)$ pozitif olduğundan, bu denklem (1) self-adjoint formunda yazılabilir. Gerçekten, bu denklem, (4) den,

$$
\begin{aligned}
q(n) &= \cos n - 4.3^{n-1} + 3^n + 3^{n-1} \\
&= \cos n
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$\Delta(3^{n-1}\Delta x(n-1)) + (\cos n)x(n) = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Genel olarak,

$$\alpha(n)x(n+1)+\beta(n)x(n)+\gamma(n)x(n-1)=0 \tag{5}$$

denklemi, $n \in [a, b+1]$ için $\alpha(n) > 0$ ve $n \in [a+1, b+1]$ için $\gamma(n) > 0$ olmak koşuluyla (1) self-adjoint formunda gösterilebilir: (5) denkleminin iki yanı pozitif bir $\delta(n)$ fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$\delta(n)\alpha(n)x(n+1)+\delta(n)\beta(n)x(n)+\delta(n)\gamma(n)x(n-1)=0 \tag{6}$$

bulunur. Bu denklemin (2) formunda olması için

$$\delta(n)\alpha(n)=p(n) \text{ ve } \delta(n)\gamma(n)=p(n-1)$$

sağlanmalıdır. Buradan birinci basamaktan

$$\delta(n+1)=\frac{\alpha(n)}{\gamma(n+1)}\delta(n), \;\; n \in [a, b],$$

fark denklemi ortaya çıkar.

Bu denklem

$$\delta(n) = \mu \prod_{i=a}^{n-1} \frac{\alpha(i)}{\gamma(i+1)}$$

çözümüne sahiptir; burada μ herhangi bir pozitif sabit veya sadelik bakımından $\mu = 1$ dir. Böylece

$$p(n) = \alpha(n) \prod_{i=a}^{n-1} \frac{\alpha(i)}{\gamma(i+1)}$$

ve (4) den,

$$q(n) = \delta(n)\beta(n) + p(n) + p(n-1)$$

olduğu sürece, (6) denklemi (1) self-adjoint denklemine eşdeğerdir.

Örnek

$2^n x(n+1) + \left(\dfrac{n}{2^{\frac{n^2-n}{2}}} - 1 \right) x(n) + x(n-1) = 0$ fark denklemini self-adjoint formda yazmak için

$$\delta(n) = \prod_{i=0}^{n-1} 2^i = 2.2^2 ... 2^{n-1} = 2^{\dfrac{n(n-1)}{2}}$$

fonksiyonu hesaplanır. Böylece, verilen denklemin self-adjoint formu,

$$p(n) = 2^n . 2^{\dfrac{n^2-n}{2}} = 2^{\dfrac{n^2+n}{2}} \quad \text{ve } q(n) = n + 2^{\dfrac{n^2+n}{2}}$$

olmak üzere

$$\Delta \left(2^{\frac{n^2-n}{2}} \Delta x(n-1) \right) + \left(n + 2^{\frac{n^2+n}{2}} \right) x(n) = 0$$

dır.

$S = \{x : [a, b+2] \to \mathbb{R}\}$ cümlesi üzerinde tanımlı olan

$$Lx(n) = \Delta(p(n-1)\Delta x(n-1)) + q(n)x(n), \;\; n \in [a+1, b+1],$$

operatörünü gözönüne alalım. Buna göre (1) self-adjoint denklemi $Lx(n) = 0$ şeklinde yazılabilir.

Teorem

*(**Lagrange özdeşliği**) $x(n)$ ve $y(n)$ fonksiyonları $[a, b+2]$ üzerinde tanımlı ise, o zaman $n \in [a+1, b+1]$ için*

$$y(n)Lx(n) - x(n)Ly(n) = \Delta(p(n-1)W(y(n-1), x(n-1)))$$

dir; burada $W(n) = W(y(n), x(n))$ fonksiyonu $y(n)$ ve $x(n)$ nin Casoratyanıdır.

Sonuç

*(**Green formülü**) $x(n)$ ve $y(n)$ fonksiyonları $[a, b+2]$ üzerinde tanımlı ise, bu durumda*

$$\sum_{n=a+1}^{b+1} [y(n)Lx(n) - x(n)Ly(n)] = p(n)W(y(n), x(n))\big|_a^{b+1}$$

dir.

Sonuç

*(**Liouville formülü**) $u(n)$ ve $v(n)$ fonksiyonları (1) denkleminin $[a, b+2]$ üzerinde çözümleri ise, bu durumda $n \in [a, b+1]$ için*

$$W(u(n), v(n)) = \frac{c}{p(n)}$$

dir; burada c bir sabittir

Tanım

$x(n,s)$, $a \leq n \leq b+2$, $a+1 \leq s \leq b+1$, fonksiyonu her bir sabit $s \in [a+1, b+1]$ için

$$\begin{aligned} Lx(n,s) &= 0, \\ x(s,s) &= 0, \; x(s+1,s) = \frac{1}{p(s)} \end{aligned}$$

başlangıç değer problemini sağlıyorsa, o zaman $x(n,s)$, $n \geq s$, fonksiyonuna (1) self-adjoint denkleminin **Cauchy fonksiyonu** denir.