DİNAMİK - 2

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi
Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü

http://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=190

2. HAFTA

Kapsam:

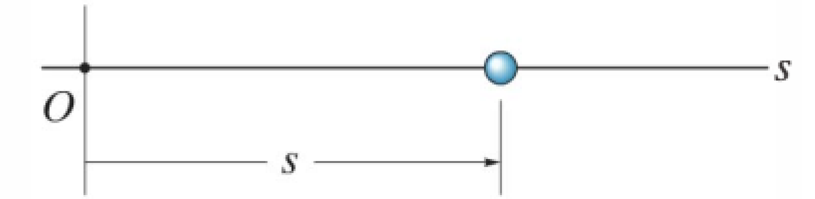
- Parçacık kinematiği
- Doğrusal hareket
- Konum
- Hız
- İvme
- Eğrisel hareket
- Kartezyen koordinatlar
- Örnek problem çözümleri

1. Parçacık Kinematiği

1.1 Bir boyutlu doğrusal hareket:

Bir parçacığın kinematiği belirli bir andaki konum, hız ve ivme ile gösterilir.

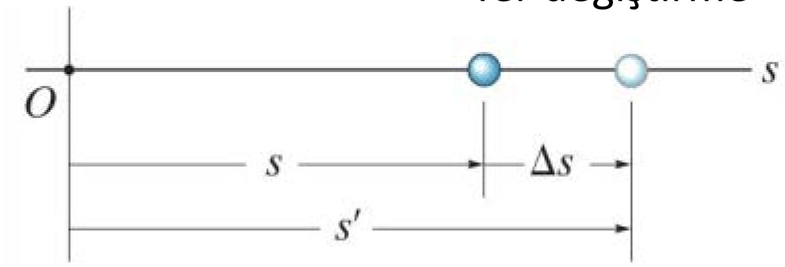
Konum



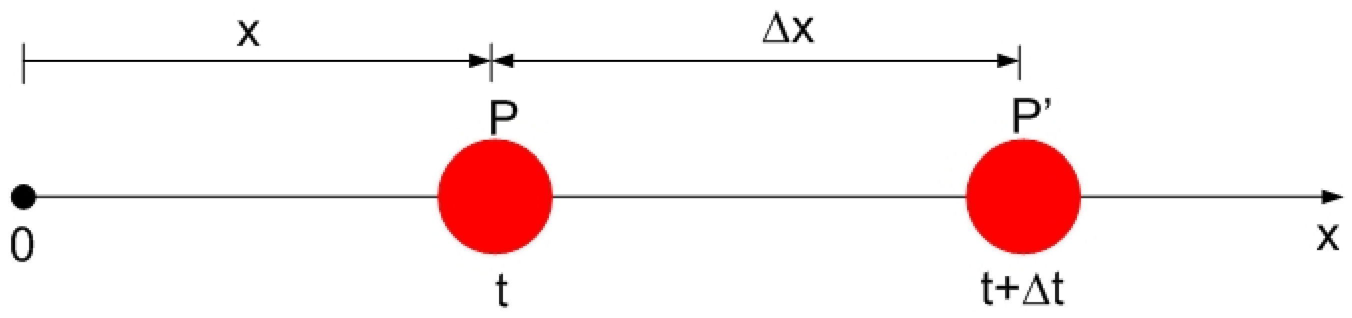
Konum: Parçacığın konumu şekildeki gibi tek eksende s ile gösterilmiştir.

Yer değiştirme: Parçacığın yer değiştirmesi onun konumundaki değişim olarak tanımlanır.

Yer değiştirme



$$\Delta s = s' - s$$



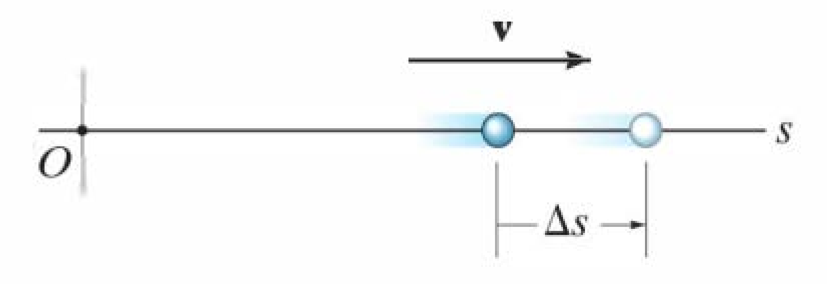
1.1 Bir boyutlu doğrusal hareket:

Bir parçacığın kinematiği belirli bir andaki konum, hız ve ivme ile gösterilir.

Hız: Parçacık Δt zaman aralığı sırasında Δs yer değişmesi kadar hareket ediyorsa, bu zaman aralığında parçacığın ortalama hızı tanımlanabilir:

Ortalama hız: $$v_{avg} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Hız



Anlık hız: Çok küçük zaman aralığındaki hız olarak tanımlanır:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s / \Delta t)$$

Anlık hız: $(\xrightarrow{+})$ $$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

Hızın büyüklüğü sürat olarak bilinir. Ortalama hız daima pozitif skalerdir.
Birimi SI sisteminde m/s ‘dir.

1.1. Bir boyutlu doğrusal hareket:

Bir parçacığın kinematiği belirli bir andaki konum, hız ve ivme ile gösterilir.

İvme: Parçacığın hızı iki noktada biliniyorsa, Δt zaman aralığı sırasında parçacığın ortalama ivmesi tanımlanabilir:

Ortalama ivme:

$$a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Anlık ivme: Çok küçük zaman aralığındaki hız değişimi olarak tanımlanır:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta v / \Delta t)$$

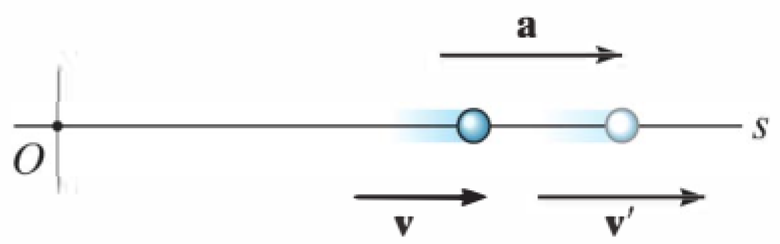
Anlık ivme:

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

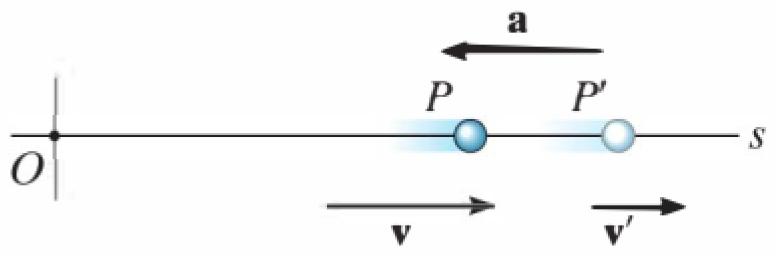
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{a\,ds = v\,dv}$$

Artan ivme



$$\Delta v = v' - v$$

Azalan ivme



1.1. Bir boyutlu doğrusal hareket:

Bir parçacığın kinematiği belirli bir andaki konum, hız ve ivme ile gösterilir.

Sabit ivme: Parçacığın ivmesi sabit olduğu zaman üç kinematik denklemin integrali alınabilir:

$$a_c = dv/dt,$$

$$v = ds/dt$$

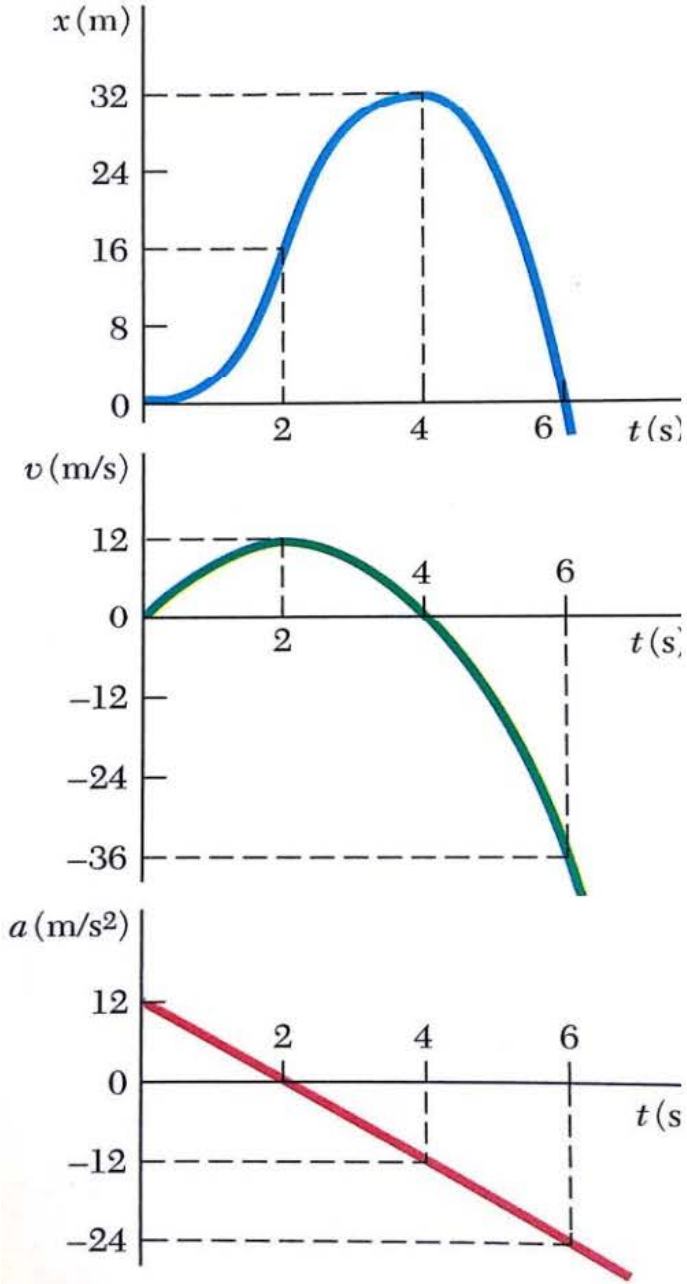
$$a_c\, ds = v\, dv$$

Zamanın fonksiyonu olarak hız: $\displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_c\, dt$ $\quad(\overset{+}{\rightarrow})\quad$ $v = v_0 + a_c t$ **(Sabit ivme)**

Zamanın fonksiyonu olarak konum: $\displaystyle\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_c t)\, dt$ $\quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$ **(Sabit ivme)**

Konumun fonksiyonu olarak hız: $\displaystyle\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{s_0}^{s} a_c\, ds$ $\quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$ **(Sabit ivme)**

Örnek 1:



Bir doğru üzerinde hareket eden bir parçacığı göz önüne alalım ve yerinin

$$x = 6t^2 - t^3$$

denklemiyle tanımlandığını kabul edelim.

Burada t saniye ve x ise metre cinsinden ifade edilmektedir.

Herhangi bir t anındaki v hızı x'i t'ye göre türeterek elde edilir:

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

a ivmesi ise tekrar t'ye göre türev alınarak bulunur:

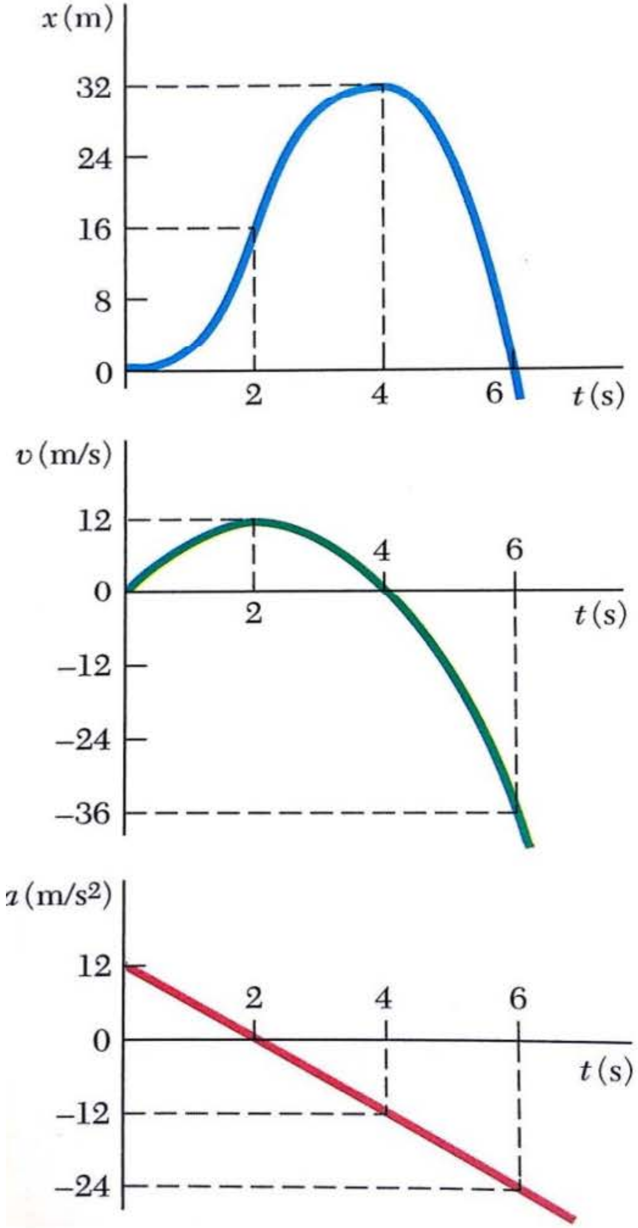
$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

Bulunan eğriler, *hareket eğrileri* olarak bilinir.

Örnek 1..

$$x = 6t^2 - t^3 \qquad v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$



Üç hareket eğrisinin incelenmesi sonucu, parçacığın t = 0'dan t = ∞'a kadarki hareketi dört evreye bölünebilir:

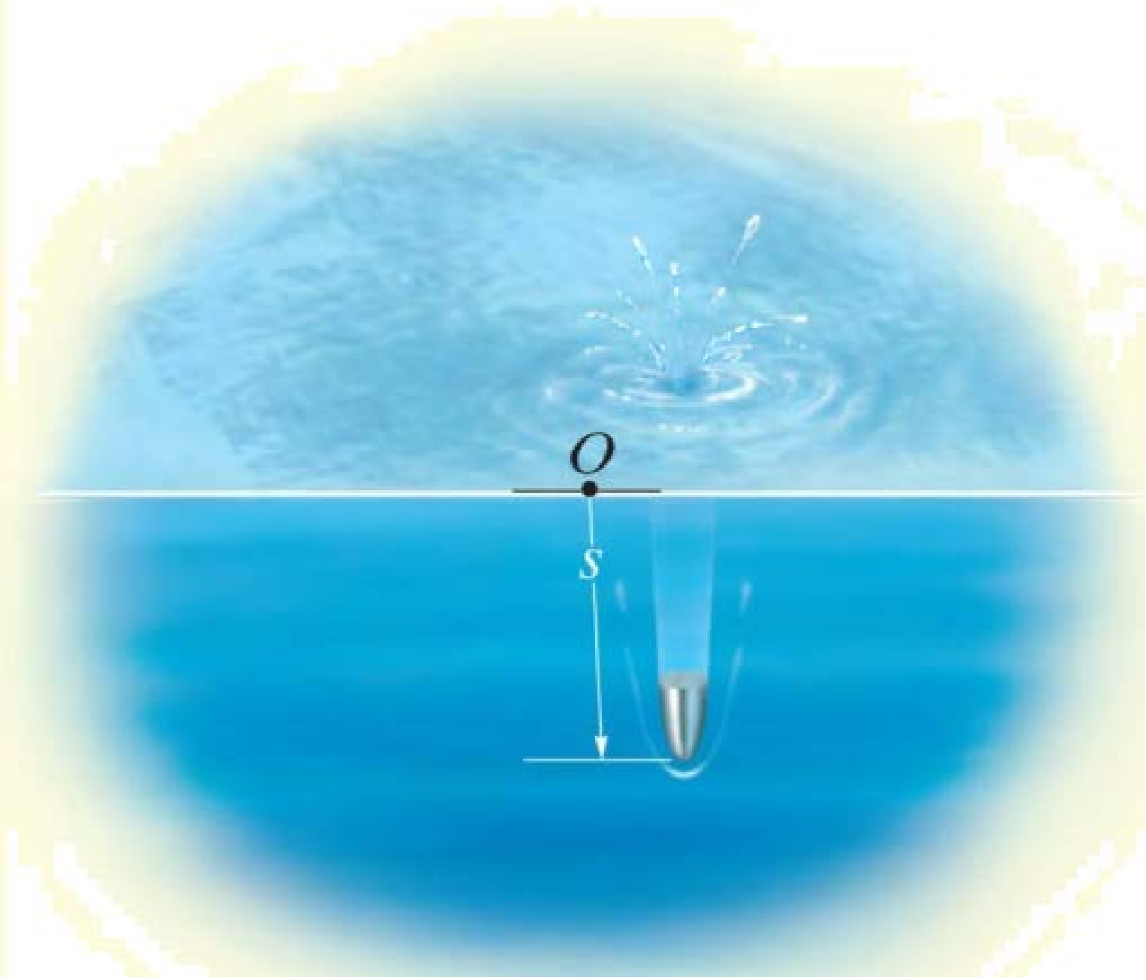
1. Parçacık orijinden, $x = 0$, hızsız ama pozitif bir ivmeyle başlamaktadır. Bu ivmenin etkisi altında parçacık pozitif bir hız kazanır ve pozitif yönde hareket eder. $t = 0$'dan $t = 2$ s'ye kadar x, v ve a'nın hepsi pozitiftir.

2. $t = 2$ s'de ivme sıfırdır; hız maksimum değerine ulaşmıştır. $t = 2$ s'den $t = 4$ s'ye kadar v pozitif, fakat a negatiftir. Parçacık hâlâ pozitif yönde ancak giderek yavaş hareket etmektedir. Parçacık yavaşlamaktadır.

3. $t = 4$ s'de hız sıfırdır. Yer koordinatı x maksimum değerine erişmiştir. Bu andan itibaren v ve a negatiftir. Parçacık hızlanmakta ve negatif yönde artan hızla hareket etmektedir.

4. $t = 6$ s'de parçacık orijinden geçmektedir. Bu durumda x koordinatı sıfırdır. Buna karşılık hareketin başından beri kat ettiği mesafe 64 m'dir. t'nin 6 s'den daha büyük değerleri, için x, v ve a negatif olacaktır. Parçacık O'dan d uzaklaşarak negatif yönde giderek daha hızlı hareketini sürdürmektedir. ■

Örnek 2



Bir mermi *aşağıya doğru* dikey olarak 60 m/s'lik başlangıç hızıyla bir akışkan ortamın içine ateşleniyor. Mermi, $a = (-0.4v^3)$ olacak şekilde yavaşlamakta ise, merminin ateşlendikten 4 s sonraki hızını ve konumunu bulunuz. Burada v m/s ile ölçülmektedir.

ÇÖZÜM

Koordinat Sistemi. Hareket aşağıya doğru olduğundan, konum koordinatı başlangıç noktası O'da olmak üzere aşağı doğru pozitiftir, Şekil 12–3.

Hız. İvme hızın fonksiyonu olarak verilmiştir, bu yüzden hız v, a ve t'yi birbirine bağlayan $a = dv/dt$ denkleminden belirlenebilir. ($v = v_0 + a_c t$ niye kullanılamaz?) Değişkenleri ayırarak ve $t = 0$'da $= 60$ m/s alarak integre edersek

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$(+\downarrow) \qquad \frac{dv}{a} = dt \Rightarrow \int_{60}^{v} \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4}\left(\frac{1}{-2}\,v^{-2}\Big|_{60}^{v}\right) = t - 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0.8}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{60^2}\right]$$

$$v = \left\{\left(\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right)^{-1/2}\right\} \text{ m/s}$$

bulunur. Burada mermi aşağı doğru hareket ettiğinden, pozitif kök alınmıştır.

$t = 4$ s iken, $\qquad v = 0.559 \text{ m/s} \downarrow$ ***Yanıt***

Konum. Hız zamanın fonksiyonu olarak bilindiğine göre, merminin hızını s, v ve t'yi birbirine bağlayan $v = ds/dt$ denkleminden elde edebiliriz. $t = 0$ için $s = 0$ başlangıç koşulu kullanılarak,

$(+\downarrow)$

$$v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2} dt$$

$$s = \frac{2}{0.8}\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2}\Bigg|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0.4}\left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2} - \frac{1}{60}\right\} m$$

$t = 4\ s$ iken, $s = 4.43$ m

değişken dönüşümü ile

$$k(t) = \frac{1}{60^2} + 0.8\,t \ \ (\textit{değişken})$$

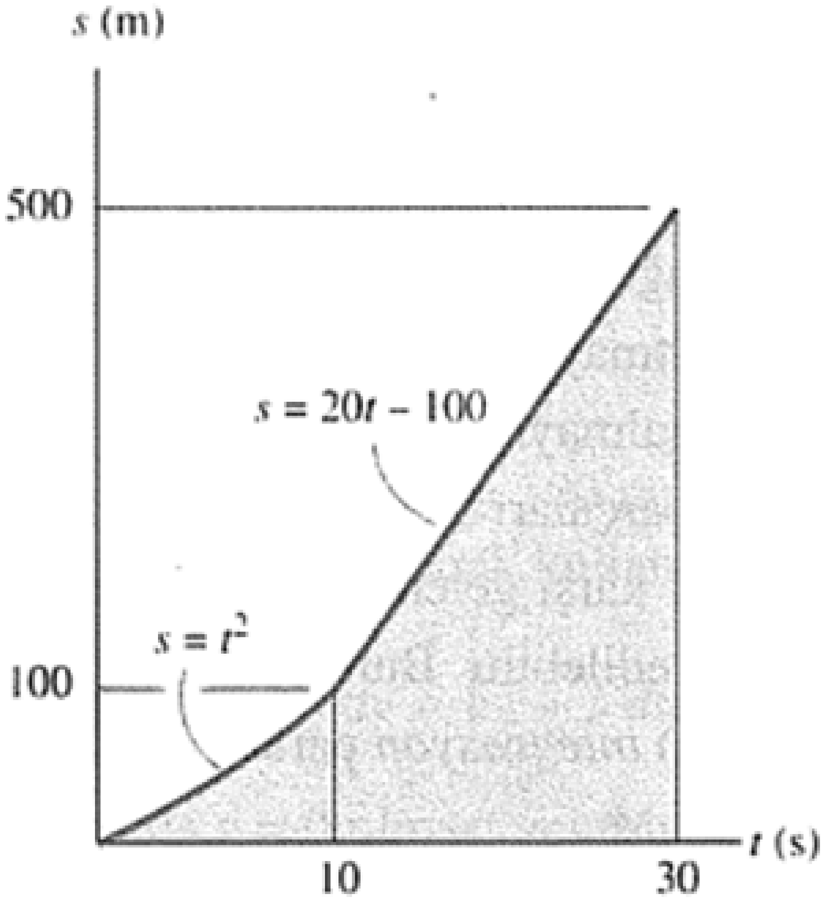
$$dk = 0.8\,dt\,,\ dt = \frac{1}{0.8\,dk}$$

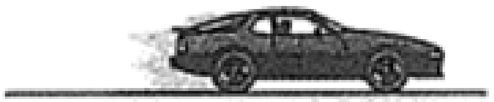
$$s = \int_{1/60^2}^{1/60^2+0.8\,t} k^{-1/2}\,\frac{1}{0.8}\,dk$$

$$s = \frac{1}{0.8}\,2\,k^{1/2}\Big|_{1/60^2}^{1/60^2+0.8\,t}$$

Örnek 3

Bir otomobil düz bir yol boyunca ilerlemektedir ve deneysel olarak konumu $0 \leq t \leq 30$ s zaman aralığı için $v-t$ ve $a-t$ grafiklerini oluşturunuz.





Çözüm

***v–t* Grafiği.** $v = ds/dt$ olduğundan, $v-t$ grafiği Şekil 12–9*a*'daki $s-t$ grafiğini tanımlayan denklemler türetilerek belirlenebilir:

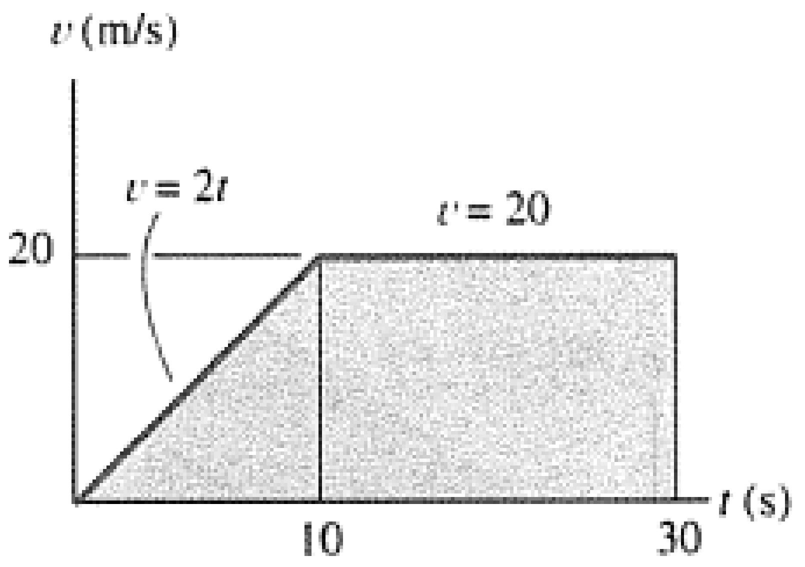
$$0 \leq t < 10 \text{ s}; \qquad s = t^2 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 2t$$

$$10 \text{ s} < t \leq 30 \text{ s}; \qquad s = 20t - 100 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 20$$

dir. Sonuçlar Şekil 12–9*b*'de çizilmiştir. Verilen bir anda $s-t$ grafiğinin *eğimini* ölçerek v'nin belli değerlerini de elde edebiliriz. Örneğin, $t = 20$ s'de $s-t$ grafiğinin eğimi 10 s'den 30 s'ye olan doğrudan elde edilir, yani

$$t = 20 \text{ s}; \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5000 - 100}{30 - 10} = 20 \text{ m/s}$$

bulunur.

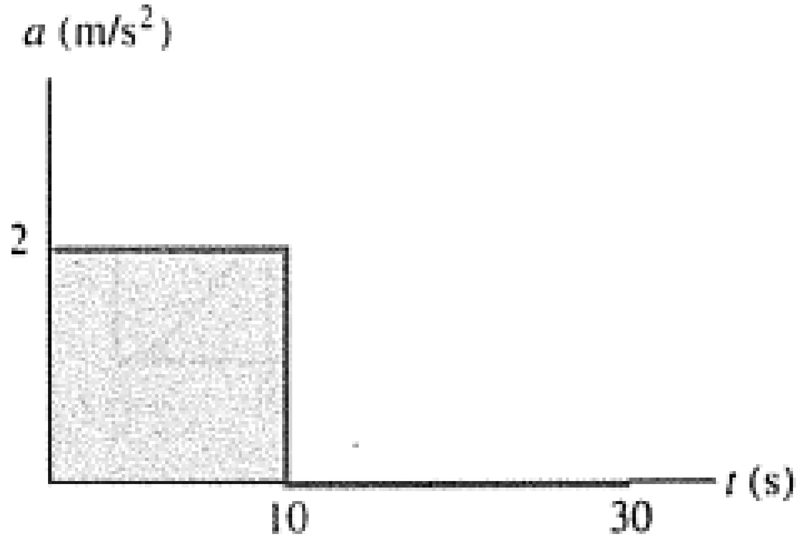


***a–t* Grafiği.** $a = dv/dt$ olduğundan, $a-t$ grafiği $v-t$ grafiğinin doğrularını tanımlayan denklemler türetilerek belirlenebilir:

$$0 \leq t < 10 \text{ s}; \qquad v = 2t \qquad a = \frac{dv}{dt} = 2$$

$$10 < t \leq 30 \text{ s}; \qquad v = 20 \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$$

olur. Sonuçlar Şekil 12–9*c*'de çizilmiştir. $v-t$ grafiğinin eğimini ölçerek $t = 5$ s'de $a = 2$ m/s^2 olduğunu gösteriniz.



Ödev 1:

Düz bir çizgi üzerinde hareket eden parçacığın hızı $v = 12 - 3t^2$ fonksiyonu ile tanımlıdır (t sn cinsindendir). t = 1 sn iken parçacık başladığı noktanın 10 m solunda ise, t = 4 sn'deki ivmesini ve t = 0 ve t = 10 sn arasında yaptığı toplam yer değiştirmeyi ve parçacığın kat ettiği toplam mesafeyi bulunuz.

Ödev 2:

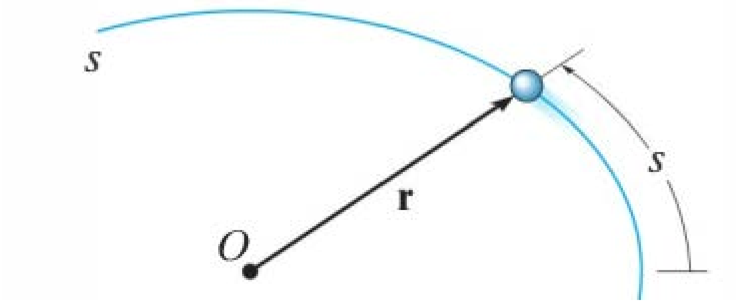
Bir doğru boyunca hareket eden bir parçacığın yeri $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$ bağıntısıyla tanımlanmıştır. Burada x metre ve t saniye cinsinden ifade edilmiştir. (*a*) Hızın sıfır olacağı zamanı, (*b*) o anda parçacığın yerini ve kat ettiği mesafeyi, (*c*) parçacığın o andaki ivmesini, (*d*) parçacığın $t = 4$ s den $t = 6$ s ye kadar kat ettiği uzaklığı bulunuz.

Ödev 3:

Bir top yerden 20 m yukarıdaki bir pencereden düşey olarak yukarı doğru 10 m/s'lik bir hızla fırlatılıyor. Topun ivmesinin sabit ve aşağıya doğru 9.81 m/s^2 olduğu bilindiğine göre (*a*) herhangi bir *t* anında topun yerden herhangi bir yükseklikteyken v hızını ve *y* yüksekliğini, (*b*) topun ulaştığı maksimum yüksekliği ve buna karşılık gelen *t* değerini, (*c*) topun yere çarptığı zamanı ve bu sıradaki hızı belirleyiniz. *v–t* ve *y–t* eğrilerini çiziniz.

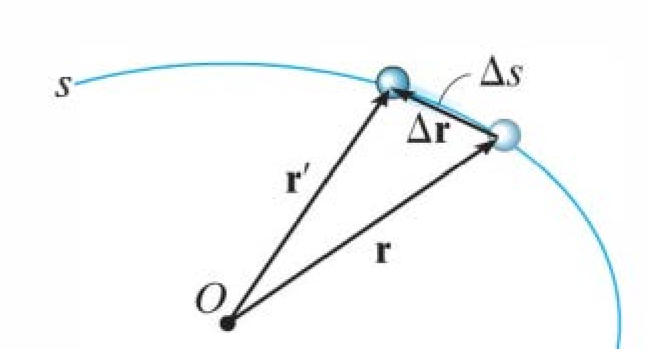
1.2. Eğrisel Hareket

Konum: Sabit O noktasından ölçülen parçacığın konumu **r** = **r**(t) konum vektörüyle gösterilir.



Konum

Yer değiştirme: Δt küçük zaman aralığında parçacık s eğrisi boyunca, yeni konumu **r’** = r +Δ **r** konum vektörüyle gösterilir. Yer değiştirme parçacık konumundaki değişimi tanımlamak için kullanılır.



Yer değiştirme

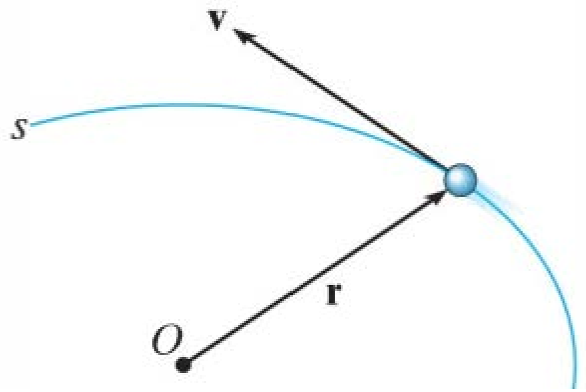
Hız: Parçacık Δt zaman aralığı sırasında Δ**r** yer değişmesi kadar hareket ediyorsa, bu zaman aralığında parçacığın ortalama hızı tanımlanabilir:

$$\mathbf{v}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Anlık hız: Çok küçük zaman aralığındaki hız olarak tanımlanır:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t)$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

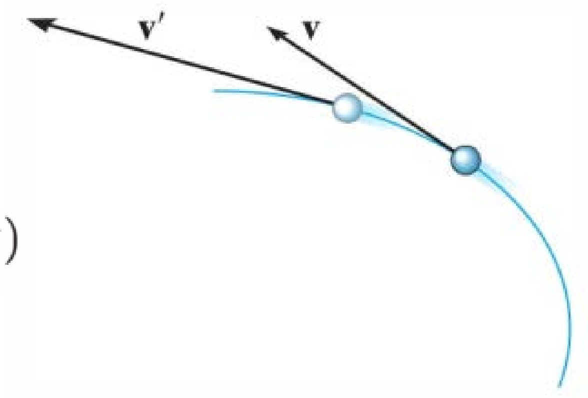


Hız

1.2. Eğrisel hareket:

İvme: Bir parçacık t anındaki **v** hızına sahipse, t + Δt anında hızı **v’** = v +Δ **v** olur. Δt zaman aralığında parçacığın ortalama ivmesi Parçacığın hızı iki noktada biliniyorsa, Δt zaman aralığı sırasında parçacığın ortalama ivmesi tanımlanabilir:

Ortalama ivme: $$\mathbf{a}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$ $$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$$

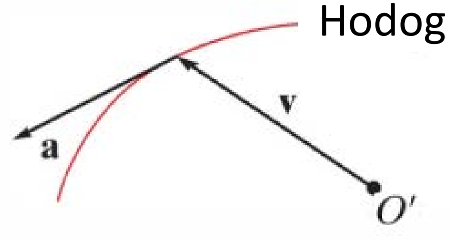


Anlık ivme: Çok küçük zaman aralığındaki hız değişimi olarak tanımlanı $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \mathbf{v}/\Delta t)$

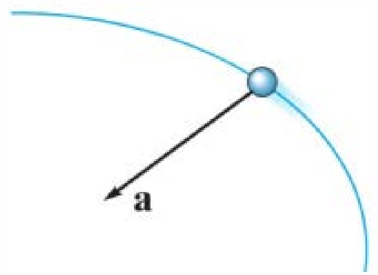
Anlık ivme:

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}}$$

Hodograf



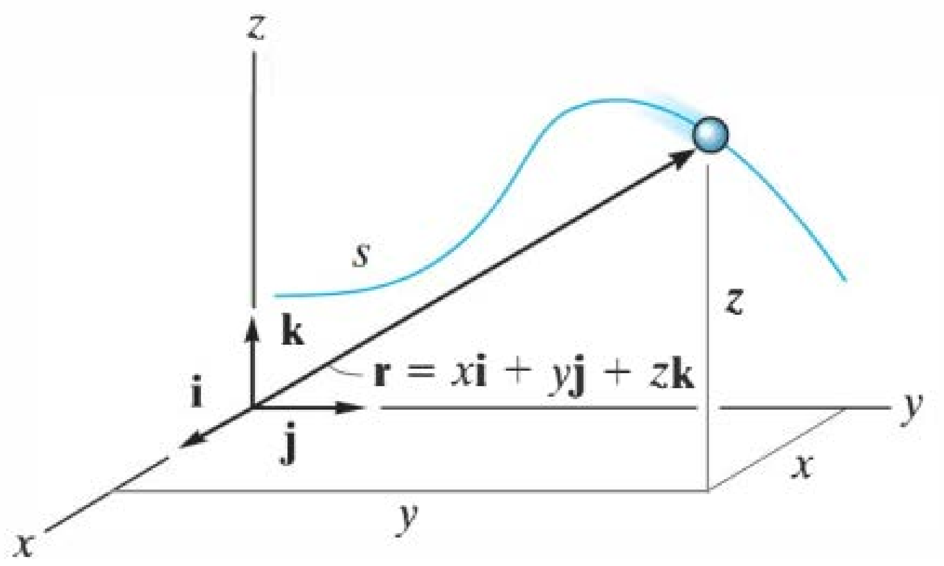
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$



1.3. Eğrisel hareket: Dik (Kartezyen) koordinatlar

Konum vektörü : $\boxed{\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}$

i, j, k sırasıyla x, y, z yönlerindeki birim vektörlerdir.



Konum vektörünün büyüklüğü: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Hız vektörü: $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ $\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}}$

Hız vektörünün büyüklüğü: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

İvme vektörü: $\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned}}$$

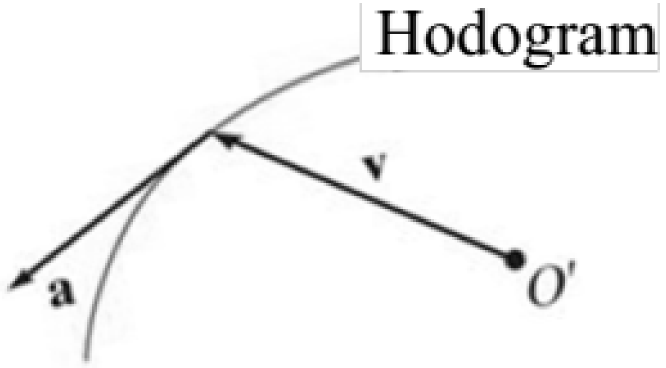
İvme vektörünün büyüklüğü: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Parçacık Kinematiği

Önemli noktalar

- Eğrisel hareket konum, hız ve ivme vektörlerinin büyüklük ve yönünde değişimlere neden olabilir.
- Hız vektörü daima yolun tanjantı, teğeti yönündedir.
- Genelde, ivme vektörü yola teğet değildir; ancak hodografa teğettir.
- Hareket dik koordinatlar kullanarak tanımlanırsa, eksenlerin her birinin bileşenleri yönü değiştirmez; yalnız onların büyüklüklerini ve cebirsel işaretini değiştirecektir.
- Bileşen hareketleri göz önüne alınarak, parçacığın konumu ve hızının büyüklüğünde ve yönündeki değişim otomatik olarak hesaba katılmış olur.

Hız vektörlerinin başlangıç noktaları aynı O′ merkezine alınırsa, oklarının taradığı eğriye (geometrik yer) **hodogram** (hodograf) ismi verilir.



Ders Kitabı:

- Hibbeler, 2014. Mühendislik Mekaniği – Dinamik, Literatür Yayıncılık, İstanbul

  Çevirenler: Ayşe Soyuçok, Özgün Soyuçok,

  Orijinal isimi: Engineering Mechanics SI Metric Edition, Dynamics.

Kullanılan Kaynaklar:

- Ferdinand Beer, Phillip Cornwell, E. Russell Johnston 2014. Mühendisler için Vektör Mekaniği Dinamik Literatür Yayıncılık, İstanbul, Çevirmen: Osman Kopmaz, Ömer Gündoğdu.

  Orijinal isimi: Vector Mechanics for Engineers: Dynamics

- Hibbeler, R. C., 2015. Engineering Mechanics: Dynamics, 14th Edition, Prentice Hall, New Jersey USA.

- Meriam, J. L. , Kraige, L. G. 2012. Engineering Mechanics: Dynamics, John Wiley & Sons, USA