DİNAMİK - 4

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu

Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi

Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü

http://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=190

4. HAFTA

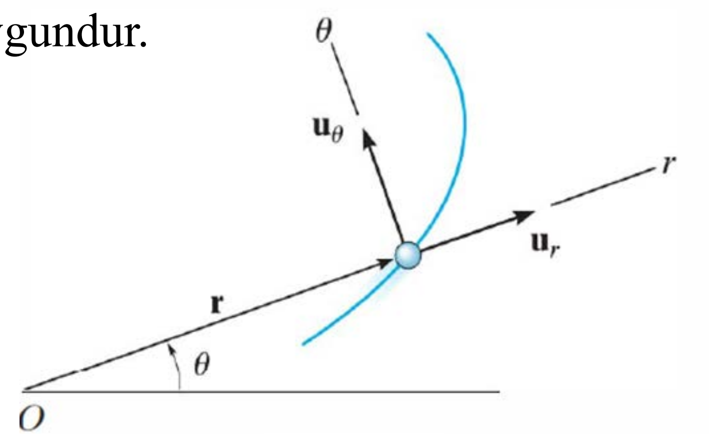
Kapsam:

- Kutupsal koordinatlar,
- Silindirikal koordinatlar
- Küresel koordinatlar
- Örnek problem çözümleri

1.6 Polar Koordinatlar (Kutupsal Koordinat)

Bir parçacığın yörüngesini bazen r ve θ koordinatları cinsinden ifade etmek uygundur.

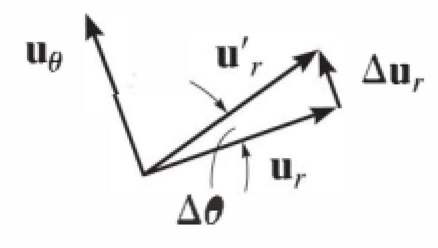
Konum vektörü: $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$



Hız vektörü: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

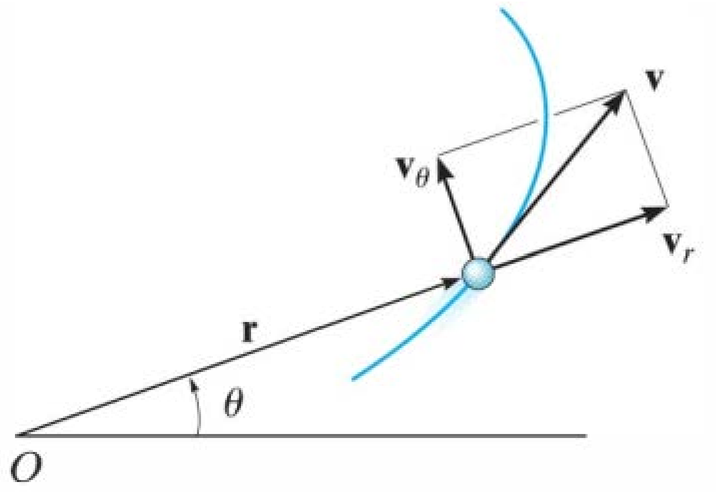
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$



$$\boxed{\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta}$$

Hızın kutupsal bileşenleri: $\boxed{\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned}}$

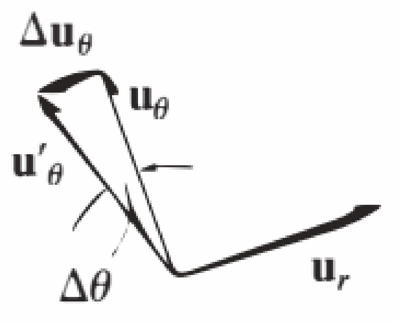
$\dot{\theta} = d\theta/dt$ Terimine açısal hız denir. Birimi radyan/s dir.



Hızın büyüklüğü: $v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$

İvme vektörü:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta$$

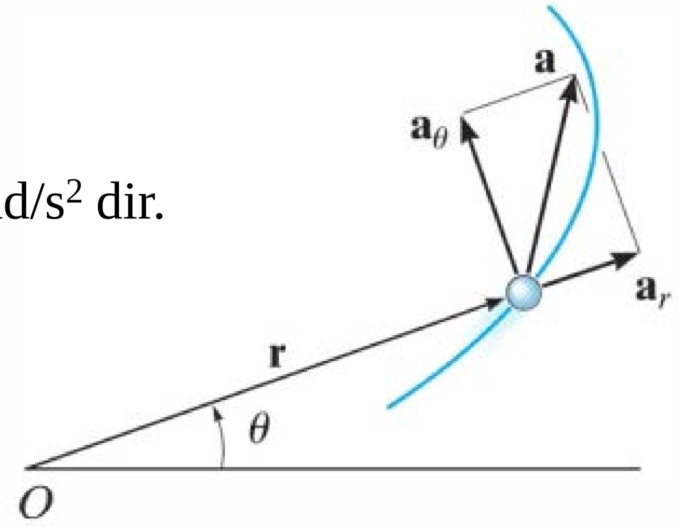


$$\boxed{\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}}$$

$\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2 = d/dt(d\theta/dt)$ terimine açısal ivme denir. Birimi rad/s^2 dir.

İvmenin büyüklüğü: $a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$



1.6. Polar Koordinatlar

Dairesel hareketi karşılaştırınız?

Sabit yarıçap durumu için:

$r = \rho$

$\ddot{r} = \dot{r} = 0$

$\dot{v} = r\ddot{\theta}$

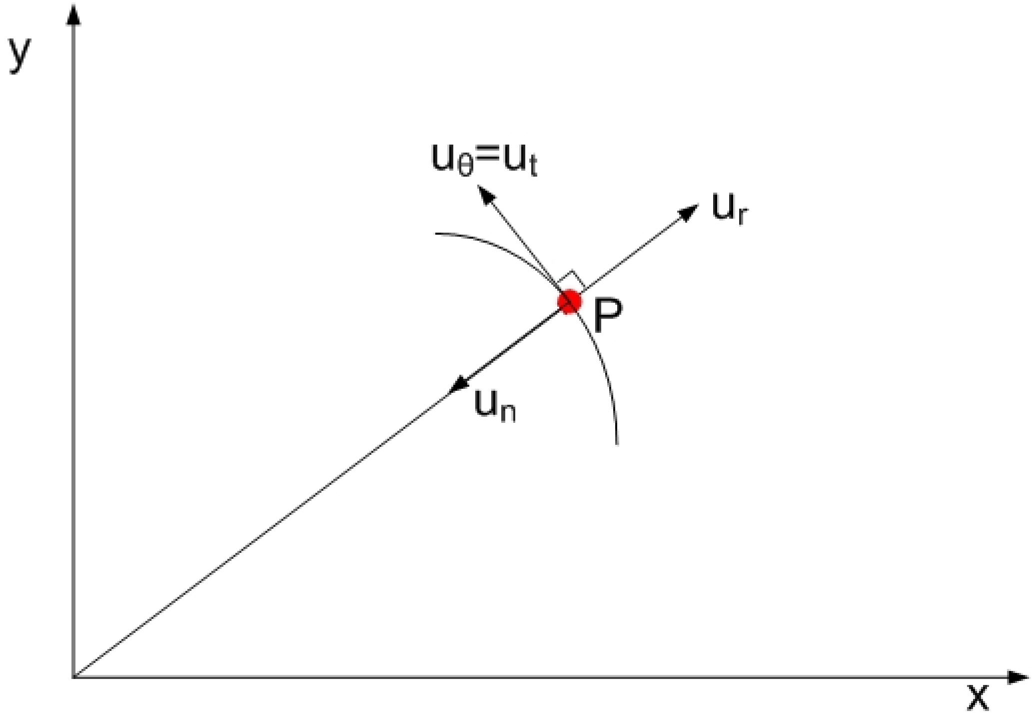
$\dot{\theta} = \dfrac{v}{r}$

$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_t$

$\mathbf{u}_r = -\mathbf{u}_n$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}$$

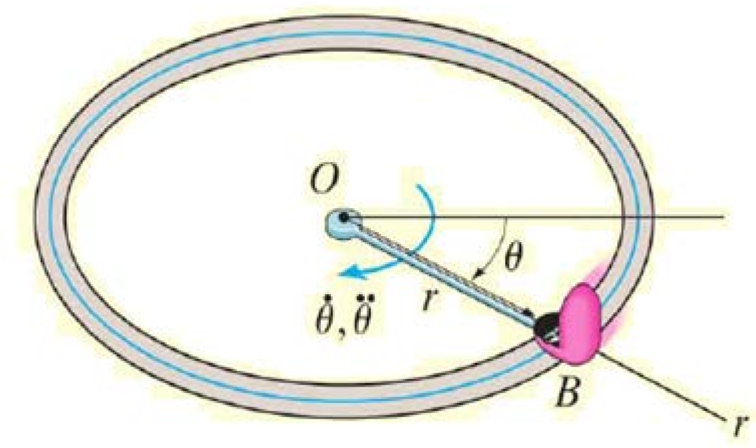
$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$



İvme vektörü:

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n$$

Parçacık Kinematiği



Lunaparktaki dönme dolabın r yarıçaplı (OB) kolu $\dot{\theta}$ açısal hızı ve $\ddot{\theta}$ açısal ivmesi ile yatay dairel yolda dönmektedir. Yolcunun hız ve ivmesinin radyal ve dik bileşenlerini bulunuz.

Koordinat sistemi:
Kutupsal koordinat:
Burada, yarıçap tüm θ için sabit olduğu için θ r ile ilişkili değildir.

Parçacık Kinematiği

Hız ve İvme:

r ve θ nın birinci ve ikinci türevleri sıfırdır. r→ sabit

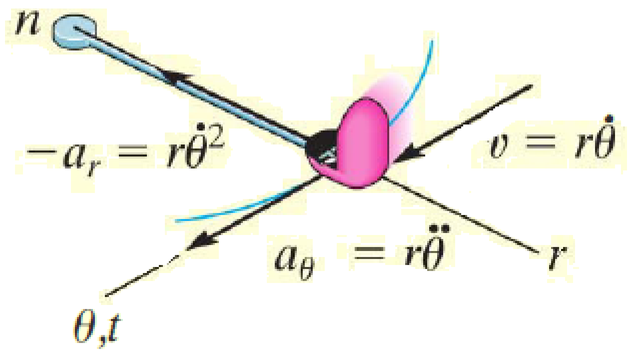
$$r = r \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

$$v_r = \dot{r} = 0$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta}$$



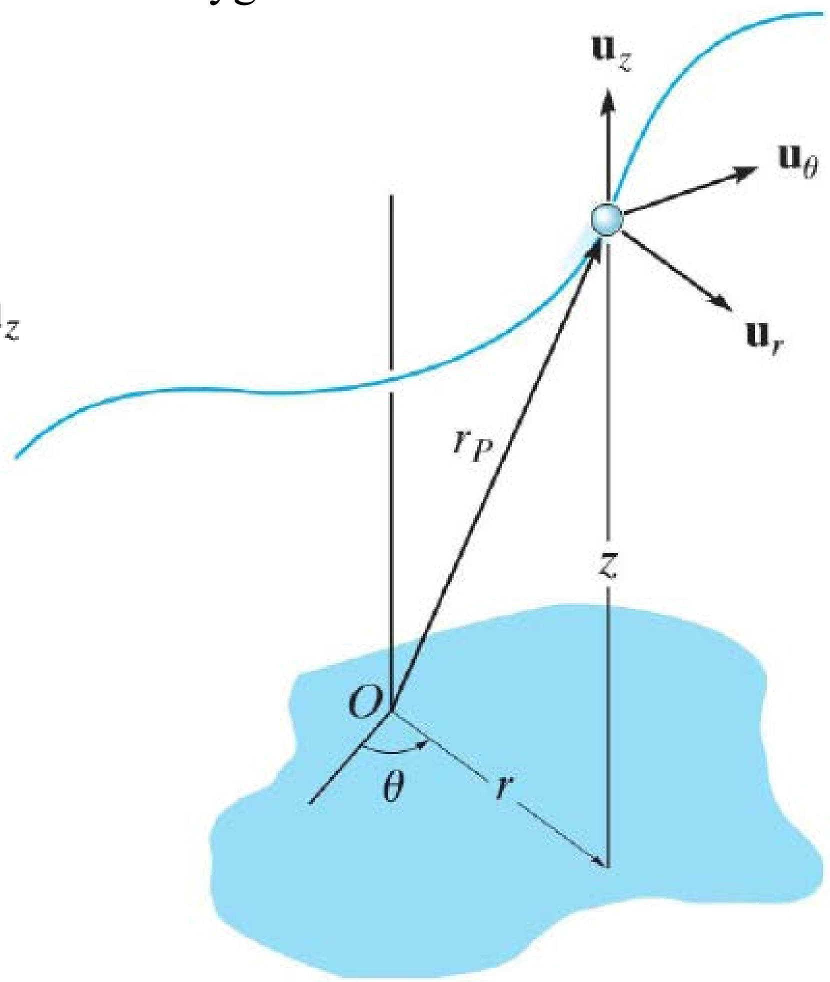
1.7. Silindirik Koordinatlar

Polar koordinatların 3 boyutlu halidir.
Bir parçacığın yörüngesini bazen r, θ ve z koordinatları cinsinden ifade etmek uygundur.

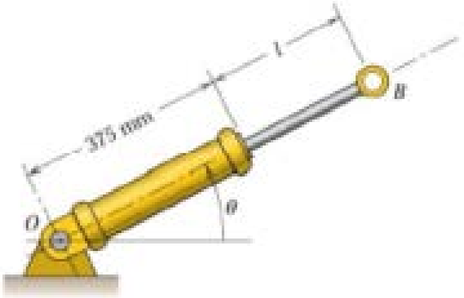
Konum vektörü: $\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$

Hız vektörü: $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z$

İvme vektörü: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z$



ÖRNEK: Hidrolik silindir O etrafında dönmekte iken pistonun hareketi silindir içersindeki yağ basıncı ile kontrol edilmektedir. Silindir $\dot{\theta} = 60\ \mathrm{derece/s}$ sabit hızla dönmekte ve l boyu 150 mm/s sabit hızla kısalmakta ise, $l = 125$ mm olduğu pozisyonda, B ucunun hızını ve ivmesini belirleyiniz.



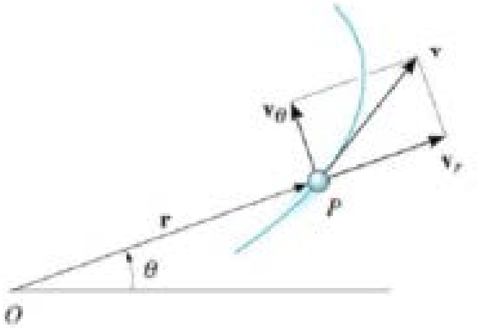
Çözüm: Hareketin incelenmesinde polar koordinatların kullanılması uygun olacaktır. Çünkü hareket radyal ve dik doğrultuda bileşenleriyle basitçe ifade edilebilir. B noktasının pozisyonu,
$r = 375 + 125 = 500$ mm dir.

Hız: Açısal hız sabit $\dot{\theta} = 60\ \mathrm{der/s}$ veya $\dot{\theta} = \frac{\pi}{3}\frac{rad}{s}$ dir.

$v_r = \dot{r}$; $\quad v_r = \dot{r} = \dot{l} = -150\ \mathrm{mm/s}$

$v_\theta = r\dot{\theta}$; $\quad v_\theta = \frac{(500\ \mathrm{mm})\ (\pi\ \mathrm{rad})}{3\ \mathrm{s}} = 523.6\ \mathrm{mm/s}$

$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2}$; $\quad v = \sqrt{(-150)^2 + (523.6)^2} = 544.6\ \mathrm{mm/s}$



İvme: Radyal doğrultudaki hız bileşeni sabit olduğundan radyal doğrultudaki ivme bileşeni sıfır olacaktır.

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$;

$$a_r = 0 - 500\ \mathrm{mm}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} = -548.3\ \mathrm{mm/s^2}$$

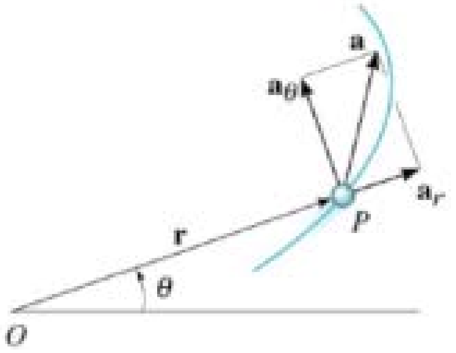
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$;

$$a_\theta = 0 + 2\left(-150\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{rad/s}$$

$$a_\theta = -314.15\ \mathrm{mm/s^2}$$

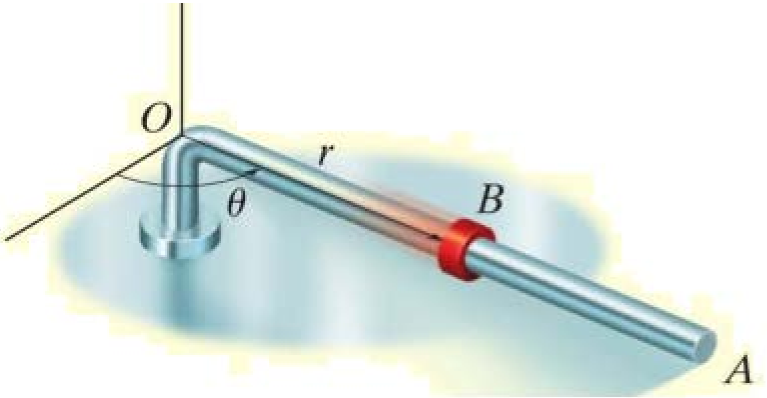
$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2}$;

$$a = \sqrt{(-548.3)^2 + (-314.15)^2} = 631.9\ \mathrm{mm/s^2}$$



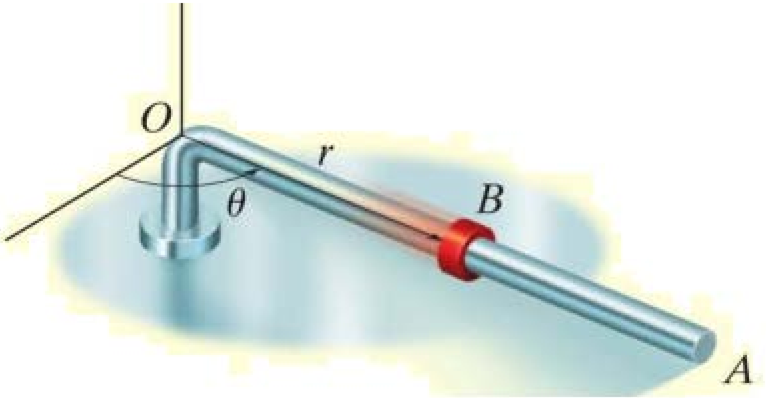
Örnek:

Şekilde gösterilen OA çubuğu, $\theta = (t^3)$ rad. olacak şekilde yatay düzlemde dönmektedir. Aynı zamanda, B bileziği, $r = (100t^2)$ mm olmak üzere, OA boyunca dışarıya doğru kaymaktadır. Her iki denklemde t saniye cinsinden olduğuna göre, $t = 1$ s iken bileziğin hız ve ivmesini belirleyiniz.



Çözüm

Koordinat Sistemi. Yolun zaman parametreli denklemleri verildiğinden, r ve θ arasında bağıntı kurmak gerekmez.



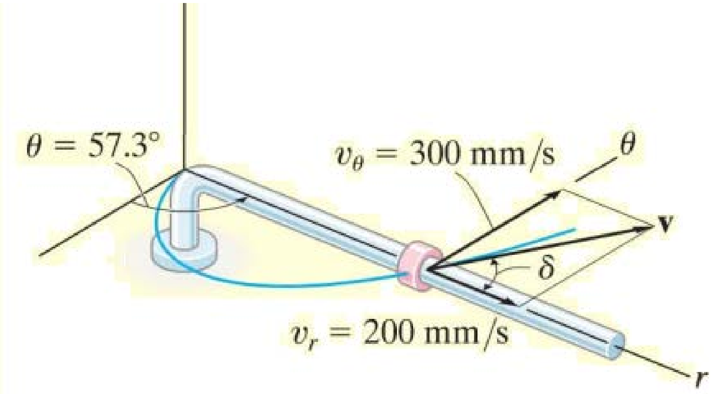
Hız ve İvme. Zamana göre türevleri bulup, $t = 1$ s için değerlerini hesaplarsak

$$r = 100t^2\Big|_{t=1\,\text{s}} = 100 \text{ mm} \qquad \theta = t^3\Big|_{t=1\,\text{s}} = 1 \text{ rad} = 57.3°$$

$$\dot{r} = 200t\Big|_{t=1\,\text{s}} = 200 \text{ mm/s} \qquad \dot{\theta} = 3t^2\Big|_{t=1\,\text{s}} = 3 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200\Big|_{t=1\,\text{s}} = 200 \text{ mm/s}^2 \qquad \ddot{\theta} = 6t\Big|_{t=1\,\text{s}} = 6 \text{ rad/s}^2$$

elde ederiz. Şekil 12–33b'de gösterildiği gibi,



$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \\ &= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta \\ &= \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\} \text{ mm/s}\end{aligned}$$

v'nin büyüklüğü

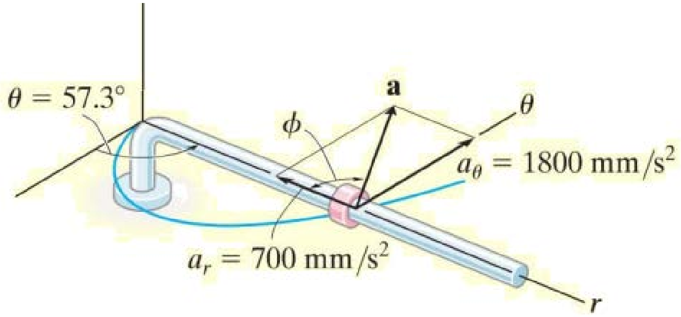
$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361 \text{ mm/s}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3° \qquad \delta + 57.3° = 114°$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \\ &= [200 - 100\,(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta \\ &= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\} \text{ mm/s}^2\end{aligned}$$

dir. **a**'nın büyüklüğü:

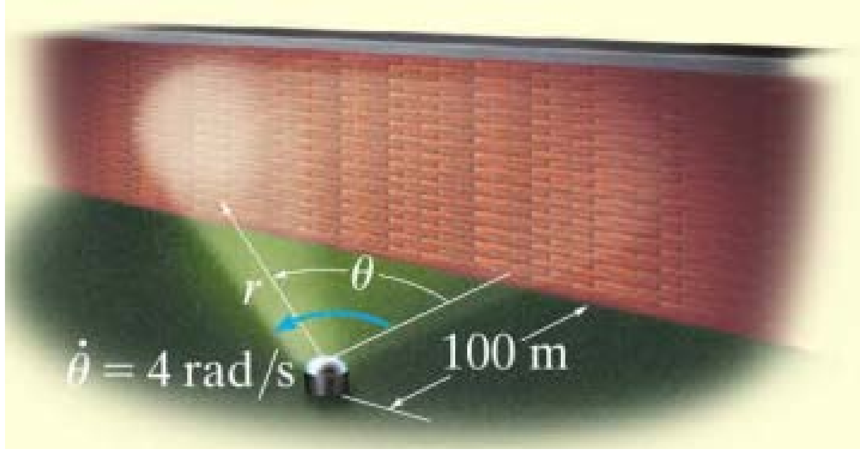


$$a = \sqrt{(700)^2 + (1800)^2} = 1930 \text{ mm/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7° \qquad \phi - 57.3° = 11.4°$$

Örnek:

Şekilde gösterilen projektör, 100 m uzaktaki duvar yüzeyi üzerine bir ışık demeti göndermektedir. $\theta = 45°$ iken ışık demetinin duvar üzerindeki hareketinin hızının ve ivmesinin büyüklüğünü hesaplayınız. Projektör sabit $\dot{\theta} = 4$ rad/s hızıyla dönmektedir.



Çözüm

Koordinat sistemi. Bu problemi çözmek için niçin kutupsal koordinatları kullanmak gerekir? Zamana göre türevleri hesaplamak için, önce r ve θ arasında bağıntı kurmak gerekir. Şekil 12–34a'dan bu bağıntı

$$r = 100/\cos\theta = 100\sec\theta$$

olarak bulunur.

Hız ve ivme. Kalkülüsün zincir kuralını kullanırsak ve $d(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$ ve $d(\tan\theta) = \sec^2\theta\, d\theta$ olduğuna dikkat edersek

$$\dot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}(\tan\theta)\dot{\theta} + 100\sec\theta(\sec^2\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 100\sec\theta\tan\theta(\ddot{\theta})$$

$$= 100\sec\theta\tan^2\theta(\dot{\theta})^2 + 100\sec^3\theta(\dot{\theta})^2 + 100(\sec\theta\tan\theta)\ddot{\theta}$$

buluruz. $\dot{\theta} = 4$ rad/s = sabit olduğundan, $\ddot{\theta} = 0$ dır ve yukarıdaki denklemler, $\theta = 45°$ iken

$$r = 100\sec 45° = 141.4$$

$$\dot{r} = 400\sec 45°\tan 45° = 565.7$$

$$\ddot{r} = 1600(\sec 45°\tan^2 45° + \sec^3 45°) = 6788.2$$

şeklini alır. Şekil 12–34b'de gösterildiği gibi,

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$= 565.7\mathbf{u}_r + 141.4(4)\mathbf{u}_\theta$$

$$= 565.7\mathbf{u}_r + 565.7\mathbf{u}_\theta$$

$$a = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2}$$

$$= 800 \text{ m/s}$$

dir. Şekil 12–34c'de gösterildiği gibi,

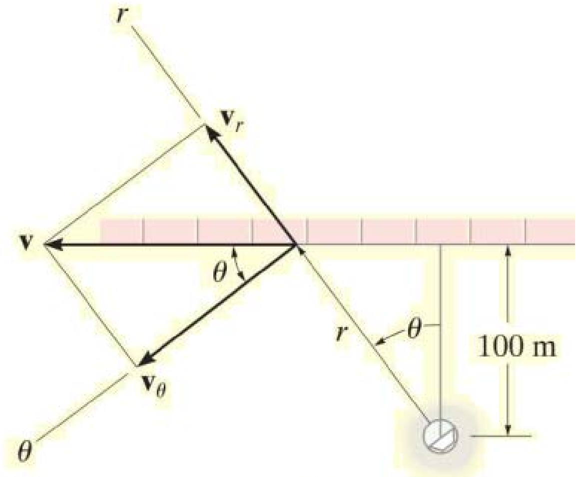
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

$$= [6788.2 - 141.4(4)^2]\mathbf{u}_r + [141.4(0) + 2(565.7)4]\mathbf{u}_\theta$$

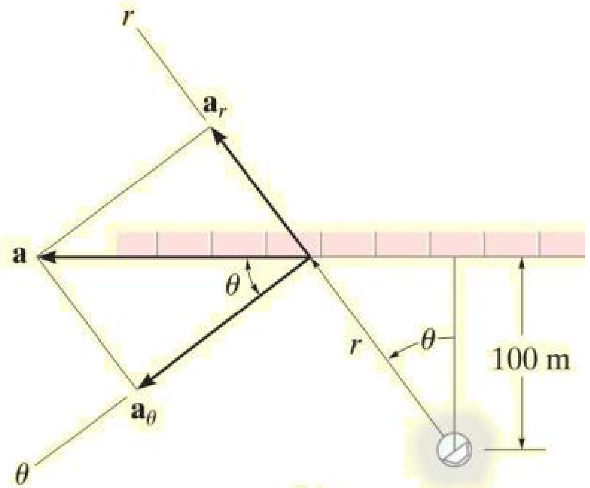
$$= 4525.8\mathbf{u}_r + 4525.8\mathbf{u}_\theta$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.8)^2 + (4525.8)^2}$$

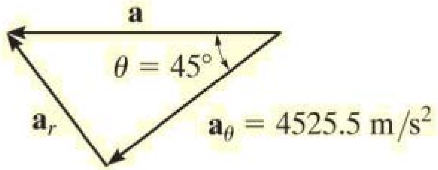
$$= 6400 \text{ m/s}^2$$



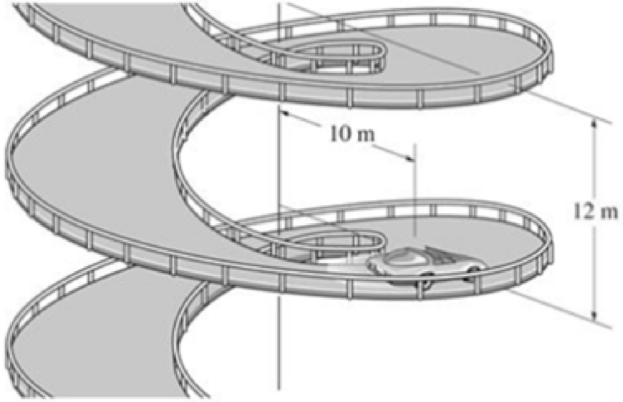
(b)



(c)



Örnek:



Verilen: Arabanın hızı sabit 1.5 m/s'dır

İstenen: Arabanın ivme vektörü.

Plan:

İpucu: Rampanın herhangi bir noktasındaki eğim açısı

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{12}{2\pi(10)}\right) = 10.81°$$

Ayrıca, ϕ ve θ arasındaki ilişki nedir?

Plan: Silindirik koordinatları kullanın. r sabit olduğundan, r 'nin zamana göre bütün türevleri sıfır olacaktır.

Çözüm: r sabit olduğundan, hızın sadece iki bileşeni vardır:

$$v_\theta = r\dot{\theta} = v\cos\phi \quad \text{ve} \quad v_z = \dot{z} = v\sin\phi$$

Dolayısıyla: $\dot{\theta} = \left(\frac{v\cos\phi}{r}\right) = 0.147 \text{ rad/s}$

$$\ddot{\theta} = 0$$

$$v_z = \dot{z} = v\sin\phi = 0.281 \text{ m/s}$$

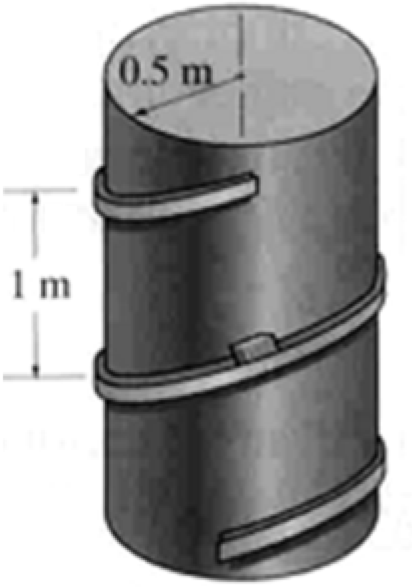
$$\ddot{z} = 0$$

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{u}_z$$

$$\mathbf{a} = (-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r = -10(0.147)^2\boldsymbol{u}_r = -0.217\boldsymbol{u}_r \text{ m/s}^2$$

Örnek:



Kutu, $r = 0.5$ m, $\theta = 0.5\ t^3$ rad ve $z = (2\text{-}0.2\ t^2)$ m ile tanımlı helis rampa üzerinde kaymaktadır. Burada t saniye cinsindendir. $\theta = 2\pi$ anındaki hız ve ivmenin değerlerini bulunuz.

Çözüm

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u_\theta} + \ddot{z}\,u_z$$

Zamana göre türevler :

$r = 0.5\ m$ $\qquad \dot{\theta} = (1.5t^2)\ rad/s \qquad z = 2 - 0.2t^2$

$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\theta} = (3t)\ rad/s^2 \qquad \dot{z} = (-0.4t)\ m/s$

$\ddot{z} = -0.4\ m/s^2$

$\theta = 2\pi$ rad olduğunda, $2\pi = 0.5t^3 \Rightarrow t = 2.325\ s.$

$\dot{\theta}\big|_{t=2.325} = 8.108\ rad/s \qquad \dot{z}\big|_{t=2.325} = -0.92966\ m/s$

$\ddot{\theta}\big|_{t=2.325} = 6.975\ rad/s^2 \qquad \ddot{z}\big|_{t=2.325} = -0.4\ m/s^2$

Hız : $v_r = \dot{r} = 0, \quad v_\theta = r\dot{\theta} = 0.5(8.108) = 4.05385\ m/s$

$v_z = \dot{z} = -0.92966\ m/s$

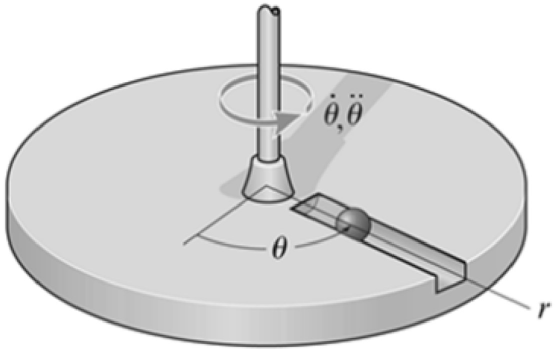
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} \cong 4.16\ m/s$

İvme : $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 0.5(8.108)^2 = -32.867\ m/s^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.5(6.975) + 2(0)(8.108)^2 = 3.487\ m/s^2$

$a_z = \ddot{z} = -0.4\ m/s^2 \quad , \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = 33.1\ m/s^2$

Ödev:



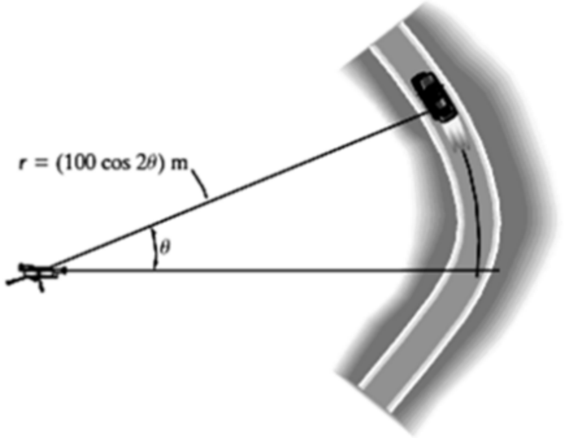
Verilen: Disk yatay düzlemde $\theta = (4t^{3/2})$ rad açıyla dönmektedir. Aynı anda bilye $r = 100\ t^2$ mm yarıçapıyla dışarıya doğru kaymaktadır. t=1.5 saniye anında bloğun hızını ve ivmesini bulunuz.

İstenen: t=1.5 saniye anında bloğun hızının ve ivmesinin büyüklüğünü bulunuz.

Plan: Polar koordinatlar ve bununla ilgili kinematik denklemleri kullan.

Sonuç: $v = 2.57$ m/s , $a = 20.4$ m/s^2

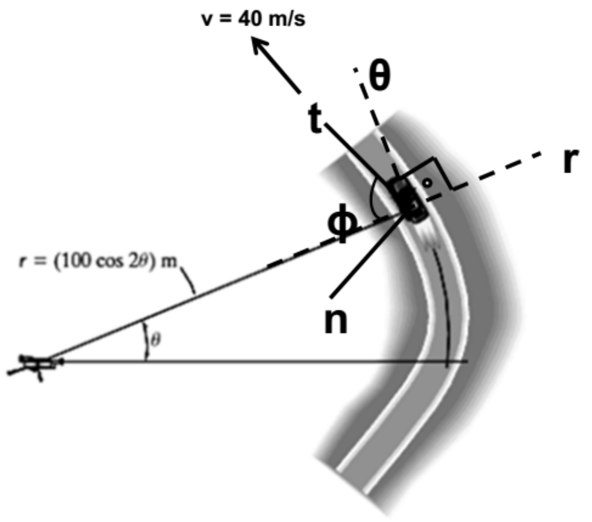
Ödev:



Arabanın sürücüsü, 40 m/s’lik sabit hızını korumaktadır. Bu durumda, arabayı takip eden kameranın açısal hızı θ = 15 derece olduğunda ne olur? (12-177)

Cevap: $\dot{\theta} = 0.302$ rad/s

İpucu:



r-θ ve n-t koordinatları çakışmıyor!

Ders Kitabı:

- Hibbeler, 2014. Mühendislik Mekaniği – Dinamik, Literatür Yayıncılık, İstanbul
  Çevirenler: Ayşe Soyuçok, Özgün Soyuçok,
  Orijinal isimi: Engineering Mechanics SI Metric Edition, Dynamics.

Kullanılan Kaynaklar:

- Ferdinand Beer, Phillip Cornwell, E. Russell Johnston 2014. Mühendisler için Vektör Mekaniği Dinamik Literatür Yayıncılık, İstanbul, Çevirmen: Osman Kopmaz, Ömer Gündoğdu.
  Orijinal isimi: Vector Mechanics for Engineers: Dynamics

- Hibbeler, R. C., 2015. Engineering Mechanics: Dynamics, 14th Edition, Prentice Hall, New Jersey USA.

- Meriam, J. L. , Kraige, L. G. 2012. Engineering Mechanics: Dynamics, John Wiley & Sons, USA